



# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

**Distorsiones al corrimiento al rojo producidas en teorías  
modificadas de gravedad**

# T E S I S

que para obtener el título de

## FÍSICO

presenta:

**Rodrigo De La Cruz Noriega**

Asesor Externo:

**Dr. Jorge Luis Cervantes Cota**

Asesor Interno:

**Dr. Federico Gabriel García Santibáñez Sánchez**

Marzo de 2017



# Índice general

Capítulos	Página
Agradecimientos	III
Introducción	v
<b>1. Relatividad general y Cosmología</b>	<b>2</b>
1.1. Precedentes de Cosmología . . . . .	2
1.2. Relatividad General . . . . .	3
1.3. Implicaciones del principio cosmológico . . . . .	8
1.4. Historia térmica del Universo . . . . .	17
1.5. Modelo estándar de Cosmología . . . . .	23
1.6. Observaciones Cosmológicas . . . . .	25
<b>2. Perturbaciones cosmológicas</b>	<b>31</b>
2.1. Formación de estructura . . . . .	31
2.1.1. Teoría de Perturbaciones . . . . .	36
2.2. Distorsiones de Corrimiento al Rojo . . . . .	38
<b>3. Modelos de Gravedad Modificada</b>	<b>48</b>
3.1. Gravedad Modificada . . . . .	49
3.2. Gravedad de Brans-Dicke . . . . .	51
3.3. Gravedad $f(R)$ . . . . .	53
3.4. Parametrización Post Friedmanniana . . . . .	54
<b>4. RSD en Modelos de Gravedad Modificada</b>	<b>62</b>
4.1. $\Lambda$ CDM . . . . .	64
4.2. Modelo 1 . . . . .	69
4.3. Modelo 2 . . . . .	71
4.4. Modelo 3 . . . . .	73
4.5. Modelo 4 . . . . .	75
4.6. Comparación de los Modelos . . . . .	76
4.7. Incorporación de RSD . . . . .	79
<b>Conclusiones</b>	<b>88</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>90</b>

A. Ajustes de la función de crecimiento $f(k,z)$	90
Bibliografía	95

# Introducción

Actualmente la Cosmología es una ciencia consolidada y está pasando por una era revolucionaria, pues existen grandes interrogantes que deben ser resueltos. Algunas de estas interrogantes son ¿Qué es la materia oscura? ¿Qué es la energía oscura? ¿Cómo comenzó el Universo? y ¿Cómo se ha formado la estructura que se observa en el Universo? Los avances en la Cosmología se deben a la notable exactitud en las técnicas observacionales. Ejemplos de esto son; los estudios de supernovas tipo Ia [69], los estudios de las estructuras a gran escala [16] y las observaciones extraordinariamente precisas de varios estudios recientes del Fondo Cósmico de Microondas, hechos por el satélite Planck, lanzado en 2009 [15]. Las observaciones indican que el Universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada, lo que ha provocado, entre la comunidad científica, un reto teórico y observacional a fin de encontrar la causa de esta expansión.

El modelo estándar de Cosmología se construye a partir de considerar el Universo, a gran escala, como homogéneo e isotrópico y al tomar a la teoría de la Relatividad General (RG) como la teoría correcta de la gravedad. El problema es que utiliza a dos fluidos exóticos, la materia oscura y la energía oscura, dado que si se usa el contenido energético normal, el modelo predice un universo que se expande de manera desacelerada.

La explicación más usada para la expansión acelerada del Universo es el de la energía oscura, que con una presión negativa, es capaz de provocar la expansión. Pero tiene un problema, puesto que no cuenta, a la fecha, con ninguna explicación satisfactoria acerca de su naturaleza, dado que no encaja bien con ningún modelo conocido de la física de partículas. Sin embargo, ha sido muy aceptada por la comunidad científica, pues ha sido usada para explicar otra etapa de expansión acelerada, la inflación en el Universo temprano. La teoría de la inflación inicialmente no pertenecía al modelo estándar de Cosmología, pero gracias a su gran éxito ya forma parte de éste.

La expansión acelerada no sólo se puede explicar con la energía oscura, también se puede explicar con modelos de gravedad modificada, es decir, que se ha estado utilizando una teoría incorrecta de gravitación. La RG ha sido muy cuestionada por su incompatibilidad con la física cuántica. Varios intentos de cuantizarla han mostrado que se debe modificar la acción de Einstein-Hilbert [83]. Las primeras personas que consideraron modificaciones en RG fueron Weyl y Eddington, proponiendo in-

variantes de orden superior en la acción de Einstein-Hilbert [32], entre 1919 y 1922. Pero para los físicos de la época no parecía tener sentido en lo experimental y en lo teórico. Fue hasta que Utiyama y De Witt le encontraron sentido a esas modificaciones [83], en 1962. Posteriormente Stelle, siguiendo el trabajo de Utiyama, demostró que las acciones de orden superior en la curvatura son renormalizables [80].

La teoría de la inflación es quien explica las fluctuaciones de densidad requeridas para el momento inicial de la formación de estructura. A partir de ese momento la fuerza gravitacional es la que determina la evolución de estas fluctuaciones primordiales. La gravitación, entonces, provoca que las regiones donde hay una mayor concentración de materia (una fluctuación positiva de densidad), atraiga cada vez más una mayor cantidad de materia de sus alrededores. Consecuentemente los alrededores de la fluctuación positiva, perderán cada vez más una mayor cantidad de materia, provocando una menor concentración de materia (fluctuación negativa). Si se usa sólo la materia observada (bariónica), las fluctuaciones de materia iniciales no explican el Universo observado. Por esta razón ha sido necesario introducir otro tipo de materia que provoque las fluctuaciones necesarias para reproducir el Universo observado, esta es la materia oscura.

En el presente trabajo se está interesado en describir la evolución de la formación de estructura, a gran escala del Universo, a través del espectro de potencias de galaxias, visto en el espacio de corrimiento al rojo. Se pretende utilizar las distorsiones de corrimiento al rojo para saber si el modelo estándar de Cosmología es la teoría correcta para explicar la formación de estructura o si se necesita un modelo de gravedad modificada. Se hará el estudio para ambos modelos y se comparará con los datos obtenidos por BOSS en los DR12 de CMASS para el cuadrupolo de las distorsiones de corrimiento al rojo [36, 30].

En el primer capítulo se presenta la teoría de Relatividad General y el modelo estándar de Cosmología seguido de los datos de las observaciones cosmológicas y de los proyectos que respaldan dichos datos.

En el segundo capítulo se habla de la teoría de perturbaciones para explicar la formación de estructura y de la relación que tiene con el espectro de potencias. Se presentan los efectos de las distorsiones de corrimiento al rojo en el espectro de potencias de galaxias para una teoría lineal de perturbaciones.

En el tercer capítulo se habla de modelos de gravedad modificada como alternativa a la energía oscura para explicar la expansión cósmica y de las dificultades que se presentan para hacer una teoría modificada de gravedad. Se hace énfasis en las teorías  $f(R)$ , en particular para la parametrización post-friedmanniana, empleando el modelo de Bertschinger y Zukin para esta parametrización [19], ya que este modelo es muy usado en el contexto de gravedad modificada.

En el cuarto capítulo se muestran los resultados del efecto de las distorsiones

de corrimiento al rojo en el espectro de potencias para el modelo estándar y el modelo de gravedad modificada en la parametrización de Bertschinger y Zukin. Para estos resultados se utilizó el código CosmoSIS que obtiene el mejor ajuste para los parámetros cosmológicos y a partir de éstos obtiene el espectro de potencias de materia para el modelo  $\Lambda$ CDM y mediante la construcción de un módulo especial, el de algunos modelos de gravedad modificada de entre ellos el de Bertschinger y Zukin. Después se hace la comparación con los datos de BOSS del cuadrupolo del espectro de potencias.

De igual manera se obtiene la función de crecimiento con CosmoSIS y usando la función de crecimiento en términos del parámetro de densidad de materia, se hace el mejor ajuste con gnuplot para obtener el índice de crecimiento según el modelo estándar. Para el modelo de Bertschinger y Zukin, se propone una función de crecimiento en términos del parámetro de densidad de materia y de la escala para obtener el desvío del índice de crecimiento en este modelo.

Finalmente se muestran las conclusiones obtenidas en este trabajo en el que el modelo de Bertschinger y Zukin ajusta mejor a los datos que el modelo estándar dentro de la teoría lineal de perturbaciones para la formación de estructura.



# Capítulo 1

## Relatividad general y Cosmología

### 1.1. Precedentes de Cosmología

El origen del Universo y de la vida son cuestiones que siempre han interesado y cautivado a la humanidad, el sólo hecho de saber de donde provenimos crea una gran curiosidad para seguir buscando tal respuesta, si es que la hay. A lo largo de la historia se han desarrollado diversas teorías cosmológicas que intentaron dar explicación del origen y del estado actual del Universo. En el siglo IV a. de C. varios filósofos trataron de explicar el origen del Universo, pero sin lograr una respuesta satisfactoria. Fue Platón quien planteó el siguiente problema “determinar qué clases de movimientos (circulares) uniformes y ordenados deben asignarse a cada uno de los planetas para explicar sus trayectorias anuales aparentemente irregulares” [38].

Estudiando la órbita de Marte alrededor del Sol, Johannes Kepler, con ayuda de las mediciones hechas por Tycho Brahe y a través de sus cálculos que ascendían a más de novecientas páginas, descubrió que su trayectoria sólo podía explicarse si el planeta se desplazaba a lo largo de una elipse. Con este descubrimiento Kepler se dió cuenta que todos los planetas deberían seguir trayectorias elípticas y que el Sol no estaba girando alrededor de la Tierra, sino todo lo contrario, era la Tierra quien giraba alrededor del Sol. La idea, que ya había sido propuesta por Nicolás Copérnico, fue confirmada con las observaciones hechas por Galileo Galilei. Pero fue hasta Newton quien, por medio de su ley de la gravitación universal, describió completamente el movimiento de todos los planetas. Las tres leyes de Kepler explican como se comportan los planetas y las leyes de Newton explican el porqué lo hacen así.

Aún cuando las ecuaciones de Newton eran muy precisas para describir las órbitas de los planetas, había uno que no obedecía del todo bien a la ley de gravitación. El perihelio de Mercurio no se ajustaba correctamente a los cálculos. Años más tarde, Albert Einstein a través de su teoría de la Relatividad, Especial y General, logró explicar correctamente el perihelio de Mercurio, dando fin a los problemas que daba la teoría de la gravedad de Newton.

La observación cosmológica más simple, puede ser que el cielo es oscuro por la

noche. Este hecho fue observado por Kepler, quien, en 1610, lo utilizó como evidencia de un Universo finito. Heinrich Olbers, en 1823, pensaba que si el Universo fuera infinito y estuviera plagado de estrellas uniformemente distribuidas en el espacio, sin importar la dirección en la que mirásemos, siempre encontraría una estrella y su brillo debería llegar hasta nosotros, provocando que el firmamento nocturno fuese tan brillante que cubriría todo el espacio, por lo que, el cielo sería eternamente brillante como el Sol. Esta idea de Olbers, ponía de manifiesto que el Universo debería ser finito y la velocidad de la luz finita.

A inicios del siglo XX, se hizo un descubrimiento muy importante que causó controversias entre la comunidad científica. Entre 1916-1917 Einstein pensaba que el Universo era estático [74], pero Edwin Hubble, que trabajaba con uno de los telescopios más potentes de los años veinte, se dió cuenta, que el movimiento de las galaxias distantes indicaba que su distancia de separación aumentaba unas de otras, eso significaba que años antes las galaxias se encontraban más cercanas entre ellas y si siguiéramos en retroceso, todo estaría agrupado en una sola región. Hoy en día, en la visión actual de la ciencia, se creó que el Universo tuvo inicio en un evento conocido como el *Big Bang* (BB) hace unos 13.8 mil millones de años. El Big Bang (La Gran Explosión), es el evento en el que surge el Universo. Su descripción es que toda la energía del Universo se encontraba comprimida en un punto, la noción de espacio y tiempo aquí no existen. De pronto, en una fracción de segundo, surge una enorme explosión, se ha liberado toda la energía, la temperatura es extremadamente alta y el espacio se expande a gran velocidad.

La Cosmología moderna comienza con George Gamow quien a mediados de 1940 calculó cómo el Universo empezaría a partir de un estado muy caliente y denso, así como ocurre dentro de los núcleos de las estrellas. Al ser tan caliente y denso la materia y la luz estaban acopladas y se describían como un fluido de radiación siguiendo la ley de Stefan-Boltzmann. Así, el Universo debió ser dominado por la radiación y la expansión fue controlada por ésta hasta llegar a la época de la última dispersión en el que la luz y la materia se desacoplan, con una temperatura de  $T \sim 10$  eV, provocando que la luz viaje libremente por el Universo, este acontecimiento dejó una huella que puede medirse hoy en día (la llamada Radiación Cómica de Fondo (RCF), CMBR por sus siglas en inglés, cosmic microwave background radiation, a veces llamada simplemente CMB) pero con una temperatura cercana al cero absoluto, puesto que la expansión enfriaría cualquier cosa en el Universo. La RCF fue medida por Penzias y Wilson en 1965 y los hizo acreedores al premio Nobel de Física en 1978, como se verá más adelante.

## 1.2. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General (RG), es la teoría de gravitación en la cual se desarrolla la Cosmología moderna. Postulada en noviembre de 1915 por Albert Einstein [33], quien la desarrolló como una generalización de su teoría de la Re-

latividad Especial (RE) [34]. RG es justamente la que proporciona la herramienta matemática con la cual se obtienen las ecuaciones cosmológicas, pues para estudiar el cosmos, se necesita una teoría de gravedad que describa su cinemática y su dinámica.

La RE surge del hecho de mantener invariantes las ecuaciones de Maxwell al cambiar de un marco de referencia a otro. Para ésto, Einstein postuló dos principios que se cumplen para los sistemas inerciales y que son la base de la RE. Dichos principios postulan lo siguiente:

- Las leyes de la física son las mismas en cada marco de referencia inercial.
- La velocidad de la luz ( $c$ ) es independiente del marco de referencia inercial<sup>1</sup>. Es decir, la velocidad de la luz no depende de la velocidad de la fuente de la que es emitida [76].

Eintein obtuvo las transformaciones de Lorentz a partir de estos principios [76, pág. 22]. Estas transformaciones dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell ante un cambio de marco de referencia, independientemente de la velocidad a la que se muevan.

Uno de los conceptos más importantes que usa esta teoría es el de la *métrica*, y es que, la métrica establece como es la geometría del espacio, que en relatividad dice, cual es la geometría que tiene el espacio-tiempo. En RE la métrica que se usa es la llamada *métrica de Minkowski* dada por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Todos los observadores inerciales en el espacio-tiempo de Minkowski siguen trayectorias rectas, es decir, observan que el espacio-tiempo es plano. El elemento de línea con esta métrica se mide conforme a<sup>2</sup>

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.2)$$

La ecuación (1.2) es la distancia entre dos eventos que ocurren en el espacio-tiempo de Minkowski. Como se ha visto, RE se cumple para sistemas inerciales. La necesidad de obtener una teoría General de la Relatividad es el de abarcas los sistemas de referencia no inerciales. Para empezar con el estudio de RG se usarán las cantidades  $\hbar = c = 1$ , donde  $\hbar = h/2\pi$  y  $h$  es la constante de Planck, las cuales

---

<sup>1</sup>La velocidad de la luz es un límite, es decir, ningún cuerpo puede viajar más rápido que ésta y tiene un valor de  $c = 2.998 \times 10^8 \frac{m}{s}$ .

<sup>2</sup>El artículo original de Einstein fue publicado en 1905, mientras que la discusión de Minkowski de la geometría del espacio-tiempo fue dada en 1908. Los artículos de Einstein y de Minkowski se reimprimieron (en inglés) en El Principio de la Relatividad por A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Minkowski, y H. Weyl (Dover) [60, 76].

pertenecen al sistema de unidades naturales. Y la convención de signos será acorde a la referencia [63, págs. 53 y 340].

Einstein postuló dos principios más que se cumplirían para los sistemas no inerciales y que son la base de RG. Los principios de la teoría son:

- *El principio de equivalencia.* El principio de equivalencia débil (PED), menciona que las partículas que caen libremente se mueven a través de geodésicas en el espacio-tiempo. Pero el PED se refiere únicamente a las partículas. ¿Cómo son, por ejemplo, los fluidos afectados por una métrica no plana? Se necesita generalizar el PED.

Principio de equivalencia de Einstein<sup>3</sup>: cualquier experimento físico local que no involucre la gravedad, tendrá el mismo resultado que si se realiza en un marco inercial que cae libremente, como si fuera realizado en el espacio-tiempo plano de relatividad general. En este caso, 'local' significa que el experimento no involucra campos, tales como el campo eléctrico, que pueden extenderse sobre grandes regiones y por lo tanto se extienden fuera del dominio de validez del marco inercial local.

En otras palabras, los campos gravitacionales uniformes son equivalentes a los marcos de referencia acelerados uniformemente con respecto a los marcos de referencia inerciales [76, pág. 173].

- *El principio de covarianza.* Las leyes de la Física deben tomar la misma forma en todos los marcos de referencia (inerciales y no inerciales), es decir, son invariantes ante transformaciones de coordenadas.

En RG, con presencia de gravedad, la métrica depende de lo que se quiera estudiar, ya sea un agujero negro, un sistema binario, un pulsar e incluso nuestro propio Sol. Aquí, las trayectorias de los observadores acelerados en el espacio-tiempo ya no son siempre líneas rectas y tampoco es plano necesariamente, ahora el espacio-tiempo puede ser curvo al igual que las trayectorias de los observadores acelerados, es decir, no se pueden usar las transformaciones de Lorentz para los observadores acelerados. El espacio-tiempo es plano sólo en la medida que la gravedad pueda ser ignorada. Con esto, el elemento de línea general es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.3)$$

RG es una teoría del campo gravitacional, así que se debe especificar cómo las fuentes del campo gravitacional determinan la métrica del espacio-tiempo. Acorde con la teoría de Einstein, el responsable del campo gravitacional es el tensor de energía-momento, es decir, todo lo que contenga materia y energía inducirá curvatura

---

<sup>3</sup>Esto ha sido probado experimentalmente con una precisión extremadamente alta en el experimento llamado Eötvös. Véase Dicke (1964) [31].

en el espacio. La ecuación del campo gravitacional se obtiene a partir de la densidad lagrangiana de Einstein-Hilbert dado por<sup>4</sup>:

$$\mathcal{L} = \left( \frac{1}{16\pi G} R + L_m \right) \sqrt{-g}, \quad (1.4)$$

donde  $L_m$  es el lagrangiano de materia,  $R$  es el escalar de Ricci, el cual, se define a partir del tensor de curvatura de Riemann por la siguiente relación  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$ ,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor Ricci y  $R_{\mu\lambda\nu}^{\gamma}$  es el tensor de Riemann, el cual, se define como  $R_{\mu\lambda\nu}^{\gamma} V^{\mu} = \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} V^{\gamma} - \nabla_{\nu} \nabla_{\lambda} V^{\gamma}$ , donde  $\nabla_{\alpha}$  indica derivada covariante y  $V^{\gamma}$  es un vector.  $G$  es la constante de gravitación universal y  $g = |g_{\mu\nu}|$ . El lagrangiano (1.4) se puede separar en un lagrangiano de materia y uno geométrico, tal que, se escribe la acción de Einstein-Hilbert

$$S = S_g + S_m, \quad (1.5)$$

donde

$$S_g = \int \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G} d^4x, \quad (1.6)$$

$$S_m = \int \sqrt{-g} L_m d^4x. \quad (1.7)$$

Con  $L_g = \frac{R}{16\pi G}$  el lagrangiano geométrico. Haciendo la variación con respecto a la métrica ( $g^{\mu\nu}$ ) de la ecuación (1.5), que cumple con  $\delta S = \delta(S_g + S_m) = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{16\pi G} \int d^4x (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \\ & + \int d^4x (\sqrt{-g} \delta L_m + L_m \delta \sqrt{-g}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

al tomar que  $\delta g = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})$ , implica  $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})$  [24]. Para la variación del tensor de Ricci,  $\delta R_{\mu\nu}$ , los cambios en  $g^{\mu\nu}$  no juegan ningún papel, sólo se producen cambios en los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$ . Además, la variación  $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  es un tensor, aunque  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  no lo es [63]. Al considerar la variación de los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} + \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  [24], se obtiene  $\delta R_{\mu\nu}$ . Si se elije un sistema de coordenadas en el que los símbolos de Christoffel desaparezcan. Recordar que cualquier sistema de coordenadas es tan bueno como cualquier otro al estar tratando con tensores. Entonces, en este sistema de coordenadas, la variación de la curvatura se expresa en términos de las primeras derivadas de las cantidades  $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  [63], es decir,

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}}. \quad (1.9)$$

Ahora, sólo se necesita remplazar las derivadas ordinarias, las cuales se cumplen en un espacio plano como el de Minkowski, por derivadas covariantes para obtener la ecuaciones correctas en cualquier sistema de coordenadas [63, 24], por lo tanto

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} - (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu})_{;\nu} = \nabla_{\lambda} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}), \quad (1.10)$$

---

<sup>4</sup>Las unidades de la densidad lagrangiana son de (Energía)<sup>4</sup>.

donde  $\nabla_\mu$  indica derivada covariante. Retomando la ecuación (1.8), al sustituir (1.10) y  $\delta\sqrt{-g}$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left( \nabla_\lambda (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \right) - \frac{\sqrt{-g}}{2} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ & + \int d^4x \left( \sqrt{-g} \delta L_m - \frac{\sqrt{-g}}{2} L_m g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (1.11)$$

arreglando un poco esta última ecuación

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma \left( g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \right) \right] \\ & + \int d^4x \left( \sqrt{-g} \delta L_m - \frac{\sqrt{-g}}{2} L_m g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

nótese que,

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma \left( g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \right) = 0, \quad (1.13)$$

puesto que, es una integral con respecto al elemento del hipervolumen de la divergencia covariante de un vector; por el teorema de Stokes, ésto es una contribución de frontera en el infinito, que se puede poner a cero haciendo que la variación desaparezca en el infinito. Por lo tanto, este término no contribuye en nada a la variación total [63]. Entonces la ecuación (1.12) queda como

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} \\ & + \int d^4x \left( \sqrt{-g} \delta L_m - \frac{\sqrt{-g}}{2} L_m g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (1.14)$$

como  $\delta L_m = \partial L_m / \partial g^{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$  y dado que  $\delta S = 0$ , se tiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G \left( -2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} + L_m g_{\mu\nu} \right), \quad (1.15)$$

se define el tensor de energía-momento [63, 26]

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (L_m \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} + L_m g_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

finalmente, se obtiene la bien conocida ecuación de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein. La ecuación (1.17), representa un sistema de 10 ecuaciones, no lineales, acopladas y de segundo orden con respecto a la métrica, además el sistema no es linealmente independiente. La ecuación (1.17) significa que la geometría del espacio es proporcional a la cantidad de materia o fluido presente.

En otras palabras, es la materia quien le dice al espacio-tiempo como debe deformarse y el espacio-tiempo le dice a la materia como moverse.

De la ecuación (1.17), se observa que, para cuando se emplea la métrica de Minkowski la única solución es  $T_{\mu\nu} = 0$ , lo que significa que hay ausencia de materia. Pero si  $T_{\mu\nu} = 0$ , no necesariamente se obtiene la métrica de Minkowski, se puede tener la métrica para un agujero negro.

Otra característica importante de RG es que las trayectorias de las partículas en el espacio-tiempo siguen líneas geodésicas, las cuales se obtienen de la solución para la métrica de la ecuación (1.17). El hecho de que sean geodésicas se debe al principio de equivalencia. La ecuación (1.17) refleja la consistencia del principio de covarianza, ya que, la ecuación es invariante ante una transformación de coordenadas.

Cuando se introduce la constante cosmológica  $\Lambda$ , para explicar la expansión acelerada, la acción (1.6) se modifica sustituyendo  $R$  por  $R - 2\Lambda$ , entonces, las ecuaciones de campo que se obtienen son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \right). \quad (1.18)$$

La forma en como aparece la constante cosmológica en la ecuación (1.18), es como la de un fluido ideal, al que se le asocia un tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}^{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}g_{\mu\nu}$ , cuya densidad de energía es  $\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$  y con presión  $P_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$ . Por lo tanto, esta constante cosmológica actúa como un fluido con presión negativa.

### 1.3. Implicaciones del principio cosmológico

La RG abre un nuevo panorama para abordar la resolución de los problemas que plantean las propiedades del Universo a escala cósmica. Se sabe que las estrellas están distribuidas en el espacio de manera no uniforme, de hecho, se concentran en sistemas estelares individuales llamados galaxias. Pero al estudiar el Universo a gran escala,<sup>5</sup> se puede prescindir de estas faltas de homogeneidades locales. En regiones del espacio cuyas dimensiones son grandes, comparadas con las distancias que separan a las galaxias entre sí, la densidad de masa del Universo se toma como el promedio de las densidades de estas regiones. La soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, relativas a este problema, se basan en la hipótesis de que la materia está uniformemente distribuida en todo el espacio<sup>6</sup>.

El *principio cosmológico* establece que el espacio, lleno uniformemente de materia, es completamente homogéneo e isótropo en sus propiedades. Homogéneo se refiere a que la materia se encuentra uniformemente distribuida, y el que sea isótropico, se refiere a que no depende de la dirección en la que se mire el Universo,

<sup>5</sup>A distancias más grandes de 100 Mpc. 1 parsec=3.2616 años luz=3.0857  $\times 10^{16}$  m.

<sup>6</sup>Los datos astronómicos apoyan a esta hipótesis.

la materia siempre se encuentra bien distribuida. Es decir, los cúmulos galácticos se encuentran uniformemente distribuidos en el Universo, ver figura (1.1). Haciendo ésto se puede elegir un *tiempo universal*, tal que, en cualquiera de sus instantes la métrica del espacio es la misma en todos los puntos y en todas direcciones [55, pág. 359]. El principio fue introducido por A. Einstein en 1917 junto con W. de Sitter.

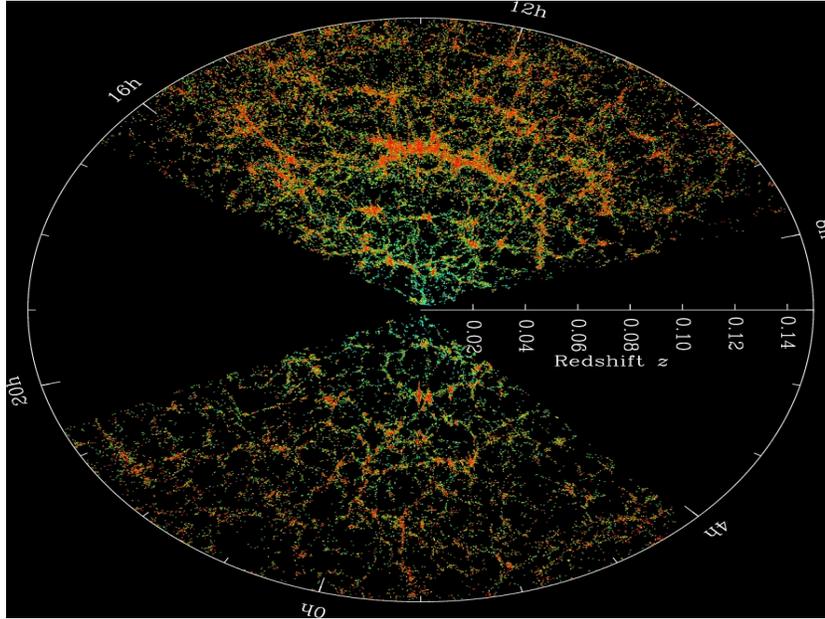


Figura 1.1: Cada punto es una galaxia; los colores muestra la densidad local, el rojo significa que hay mayor densidad. El color de cada galaxia está codificado de acuerdo a su luminosidad. Tomado de [8].

Tal idea de un Universo homogéneo e isotrópico fue explorada por A. Friedmann y G. Lemaître en la década de 1920 y puesta en sólidas bases geométricas por H. P. Robertson y A. G. Walker.

En el campo observacional, E. Hubble, en 1929, estableció que las galaxias mostraban un incremento sistemático del corrimiento al rojo (*redshift*) con el aumento de la distancia hacia nosotros. Hubble gráfico la velocidad de las galaxias contra su distancia y encontró que la pendiente es la razón de la expansión del Universo, ver figura (1.2).

A este valor de la pendiente se le conoce como el *parámetro de Hubble*, al valor actual se le llama constante de Hubble, teniendo como valor actual  $H_0 = 67.74 \pm 0.46 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [15]. La velocidad con la cual las galaxias se alejan de nosotros está dado por:

$$v = rH, \quad \text{con} \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.19)$$

$H$  es el parámetro de Hubble,  $r = xa$ , es la distancia física a la galaxia que se quiere medir,  $x$  es la distancia cómovil ( $x$  crece con la expansión) y  $a$  es un factor

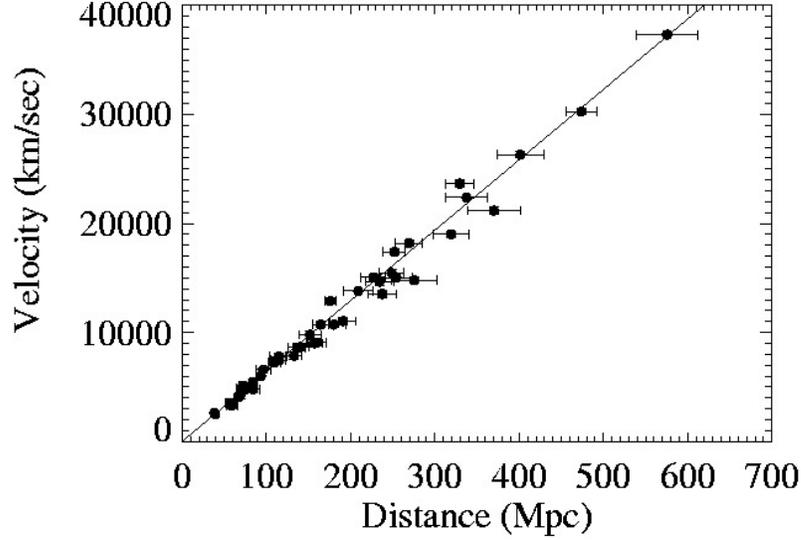


Figura 1.2: *Diagrama de Hubble. Tomado de [1].*

de expansión que se especificará más adelante. La constante de Hubble también se representa a través del valor de la tasa de expansión  $h = 0.6774 \pm 0.0098$ , dado por,

$$H_0 = 100 \cdot h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.20)$$

En la década de 1930, Eddington probó que los modelos estáticos de Einstein eran inestables. Esto estableció las bases de credibilidad de los Universos conocidos como universos de ***Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)***. Pues se tenían universos homogéneos e isotrópicos y con expansión. La métrica que justamente mantiene al espacio homogéneo e isotrópico es la *métrica de FLRW*,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.21)$$

donde  $t$  es el tiempo cósmico,  $r, \theta, \phi$  son las coordenadas esféricas de  $\mathbb{R}^3$ ,  $k$  es la curvatura constante, toma los valores  $k = 0, +1, -1$  para un universo plano, cerrado ó abierto, respectivamente. La función  $a(t)$  es un potencial desconocido de la métrica que codifica el tamaño a grandes distancias, formalmente es el factor de escala del universo. Junto con la hipótesis de homogeneidad e isotropía, se asume que el fluido cósmico dado en RG por la ecuación (1.16), es un fluido perfecto,<sup>7</sup> para el cual, el tensor de energía-momento esta dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho_m + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad del fluido perfecto considerado, excepto el de la constante cosmológica,  $P$  la presión y  $u_\mu$  es la quadri-velocidad del fluido en coordenadas

<sup>7</sup>Un fluido perfecto esta definido como uno en el que todas las fuerzas disipativas son cero y la única fuerza, entre los elementos de fluido cercanos, es la presión [76]. El fluido perfecto es isotrópico en el marco de referencia local [29].

comóviles <sup>8</sup>. Las coordenadas comóviles son las que crecen con la expansión.

Si se sustituye la métrica de FLRW en la ecuación (1.18) se obtienen las ecuaciones cosmológicas de Friedmann. Con tales ecuaciones es posible entender la expansión y evolución del Universo. Los tres tipos de universos espacio-temporales que Friedmann encontró están descritos en términos del factor de escala y la evolución de estos universos está dado por las siguiente ecuación,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.23)$$

La ecuación exhibe una relación muy simple entre el parámetro de Hubble, la geometría y la energía del Universo. La aceleración del Universo viene dada por,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.24)$$

Asumiendo la conservación del tensor de energía-momento,  $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ , se obtiene una ecuación de continuidad,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (1.25)$$

sólo dos de estas ecuaciones (1.23 - 1.25) son linealmente independientes, mientras que una de ellas puede ser deducida a partir de las otras. En esta última ecuación  $\rho = \rho_m + \rho_\Lambda$ . El sistema de ecuaciones (1.23 - 1.25) contiene tres variables desconocidas ( $\rho, a, P$ ), así que, hace falta otra ecuación para que el sistema se pueda resolver. La ecuación que se agrega es una relación entre la densidad y la presión del fluido, es una ecuación de estado barotrópica,

$$\frac{P}{\rho} = \omega = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{para radiación ó materia relativista} \\ 0 & \text{para polvo} \\ 1 & \text{para materia rígida} \\ -1 & \text{constante cosmológica} \end{cases}. \quad (1.26)$$

Tomando las ecuaciones (1.23 - 1.26), al sustituir la ecuación de estado en la ecuación de continuidad, se tiene

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1 + \omega) = 0, \quad (1.27)$$

cuya solución cuando  $\omega$  es constante es;

$$\rho(a) = \frac{c}{a^{3(1+\omega)}}, \quad (1.28)$$

con  $c$  una constante que depende de los valores iniciales para  $\rho$  y para  $a$ . El valor de  $\omega$  es diferente para cada fluido, por lo que, la densidad también será diferente, por

---

<sup>8</sup>En coordenadas comóviles  $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ , en coordenadas generales  $u_\mu$  es un cuadri-vector general.

lo tanto,

$$\rho(a) = \begin{cases} \frac{c}{a^4} & \text{si } \omega = \frac{1}{3} & \text{para radiación} \\ \frac{c}{a^3} & \text{si } \omega = 0 & \text{para polvo} \\ \frac{c}{a^6} & \text{si } \omega = 1 & \text{para materia rígida} \\ c & \text{si } \omega = -1, & \text{para constante cosmológica} \end{cases}, \quad (1.29)$$

por ende, la ecuación (1.23) se resuelve con estos valores de  $\rho$ , así para un Universo con geometría plana se tendrá,

$$a(t) = K \cdot \begin{cases} t^{\frac{1}{2}} & \text{radiación} \\ t^{\frac{2}{3}} & \text{polvo} \\ t^{\frac{1}{3}} & \text{materia rígida} \\ e^{Ct} & \text{para constante cosmológica} \end{cases}, \quad (1.30)$$

donde  $K$  y  $C$  son constantes.

Ahora bien, en Cosmología existen diferentes parámetros cuyos valores describen, en su conjunto, diferentes etapas del Universo, ya sea en la época de la radiación, materia o constante cosmológica. Uno de estos parámetros, ya mencionado anteriormente, es el de Hubble. A continuación se definirán otros parámetros y su relación entre si.

Para esto se examinará la ecuación (1.23), la cual, se puede escribir de la siguiente manera:

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{a^2H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (1.31)$$

Haciendo uso del principio cosmológico, la *densidad crítica* del Universo, esto es, la masa por unidad de volumen que se requiere para que exista un Universo plano es precisamente:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (1.32)$$

cuyo valor hoy en día es  $\rho_c^{(0)} = 4.5 \times 10^{-30} \frac{g}{cm^3}$ , que equivale a tres átomos de hidrógeno en un volumen de mil litros. Así la ecuación (1.31) resulta ser:

$$1 = \frac{\rho}{\rho_c} - \frac{k}{a^2H^2}, \quad (1.33)$$

al definir el parámetro de densidad  $\Omega$  y el parámetro de curvatura  $\Omega_k$ , como

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2H^2}, \quad (1.34)$$

la ecuación (1.23) será:

$$1 = \Omega + \Omega_k. \quad (1.35)$$

Al analizar los universos de FLRW, de la ecuación (1.35), cuando  $k = 0$ , se tiene que  $\Omega = 1$ , entonces,  $\rho = \rho_c$  y el Universo tiene geometría plana. Si  $k = +1$ , el valor de  $\Omega > 1$ , lo cual implica,  $\rho > \rho_c$  y el Universo es cerrado con geometría esférica (positiva). Por último, cuando  $k = -1$ , se obtendrá  $\Omega < 1$ , y entonces  $\rho < \rho_c$ , el Universo será abierto y con geometría hiperbólica (negativa), ver figura (1.3).



Figura 1.3: *Geometría del Universo dependiente del valor de  $\Omega_k$ . Tomado de [7].*

Además, como  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho_m + \rho_\Lambda}{\rho_c}$ , se define el parámetro de densidad de materia total  $\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_c}$  y el parámetro de constante cosmológica  $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$ , por lo tanto, la ecuación (1.35) se reescribe como

$$1 = \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda. \quad (1.36)$$

A esta ecuación, por tener tres componentes diferentes, se le conoce como la ecuación del *triángulo cósmico* y es fundamental en Cosmología, ya que proviene de una de las ecuaciones de Friedmann. Es una constricción que se debe cumplir a todo tiempo.

El Universo está compuesto por varios fluidos y el parámetro de densidad se puede separar en cada uno de ellos. Tales fluidos son la luz ( $\gamma$ ), neutrinos ( $\nu$ ), materia bariónica ( $b$ ), materia oscura ( $mo$ ) y constante cosmológica ( $\Lambda$ ) de tal manera que,

$$\Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_b + \Omega_{mo} + \Omega_\Lambda = \Omega_m + \Omega_\Lambda, \quad (1.37)$$

donde  $\Omega_\gamma$  es el parámetro de radiación,  $\Omega_\nu$  es el parámetro de neutrinos,  $\Omega_b$  es el parámetro de densidad de materia bariónica y  $\Omega_{mo}$  es el parámetro de materia oscura. El valor de cada una se determina a través de mediciones [15, 53]. Se estima que hoy en día  $\Omega_\gamma^0 \approx 10^{-5}$ ,  $\Omega_\nu^0 \approx 10^{-5}$ ,  $\Omega_b^0 \approx 0.05$ ,  $\Omega_{mo}^0 \approx 0.26$ ,  $\Omega_k^0 \approx 0$  y  $\Omega_\Lambda^0 \approx 0.69$ . A través de las mediciones de supernova [69], de la RCF [15] y de BAO [35], se tiene que  $\Omega_k \approx 0$ , entonces, la ecuación (1.36), se modifica como:

$$1 = \Omega_b + \Omega_{mo} + \Omega_\Lambda. \quad (1.38)$$

Nótese que, lo que hay en el Universo es materia y energía, e hipotéticamente, casi todo es materia y energía oscura, ver figura<sup>9</sup> (1.4). La materia oscura es un fluido que no interactúa a través de la fuerza fuerte, débil y electromagnética, sólo tienen interacción gravitacional, de largo alcance. Esta materia es responsable de proporcionar la atracción gravitacional permitiendo que objetos, como las galaxias, se formen, y los mantiene juntos una vez que se han formado. El concepto de energía oscura no se usará de manera geométrica, es decir, no se agrega el término  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , del lado izquierdo de la ecuación de Einstein (1.17), sino el término  $8\pi G \cdot T_{\mu\nu}^{EO}$ , del lado derecho de esta misma ecuación (1.17). Esta energía oscura es la energía que se le asocia a la constante cosmológica, la cual, ejerce una presión negativa como se dijo anteriormente. La energía oscura es el nombre de la sustancia o el fenómeno responsable de la aceleración del Universo, no sabiendo si es producida por la constante cosmológica o una función arbitraria del tiempo, por ejemplo, un campo escalar. En el capítulo 3 se le dará otra interpretación a esta energía oscura.

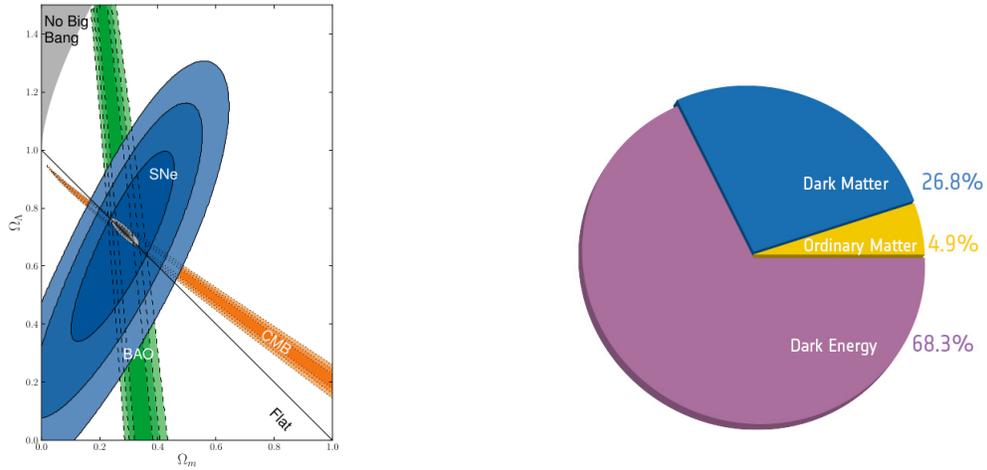


Figura 1.4: A la izquierda se muestran las regiones de confianza del 68.3%, 95.4%, 99.7% en el plano de  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  a partir de las SN Ia combinado con las restricciones de BAO y de la RCF que además incluye los errores estadísticos. Tomado de [81]. A la derecha se muestra la cantidad relativa de la densidad de materia y energía en el Universo. Tomado de [3].

En la actualidad, el Universo se encuentra constituido por una proporción de materia y energía oscura, según lo muestra la ecuación (1.37). La figura (1.5), muestra modelos del Universo con ambas componentes en diferentes proporciones. El modelo

<sup>9</sup>Supóngase que se tiene un parámetro que se desea conocer y se tienen datos de algún experimento. La probabilidad de obtener el valor del parámetro dados los datos, en principio, debería ser un valor único. En la figura (1.4), las regiones de confianza, se refieren a la probabilidad de obtener no un valor del parámetro dados los datos, sino en un contorno o región de valores dados los datos, y de ahí obtener el que tenga la mayor probabilidad. Los números 68.3%, 95.4%, 99.7%, se refieren al nivel de confianza que se tiene de encontrar el valor del parámetro, dentro del rango de valores que puede tener en ese tamaño. El 100%, se refiere a que es seguro que en ese rango de valores se encuentre el valor real del parámetro. La idea principal es hacer que este rango de valores se cada vez más pequeño. Véase referencia [84].

más aceptado por las observaciones es cuando el universo crece desaceleradamente, y después de un tiempo, lo hace de forma acelerada, ésto se cumple cuando  $\Omega_m \sim 0.3$  y  $\Omega_\Lambda \sim 0.7$  mostrado en la figura (1.4). Los demás valores son inconsistentes con las observaciones.

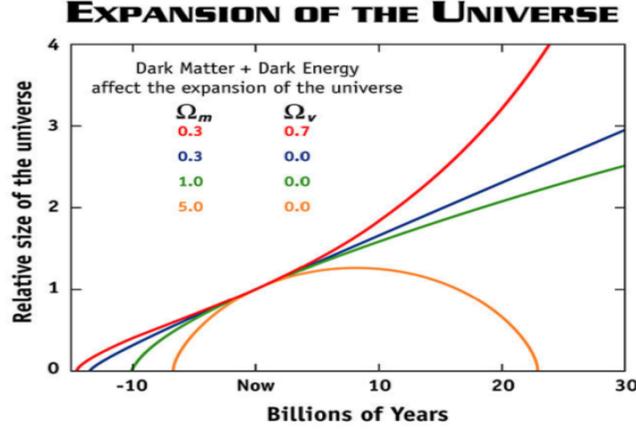


Figura 1.5: Modelos del universo para diferentes valores de materia y energía oscura. Cada modelo corresponde a un color. Tomado de [11].

El parámetro de Hubble nos da una medida de como el Universo se va expandiendo y a que velocidad lo está haciendo, dicho parámetro va cambiando con el tiempo. Una forma de cuantificar esto es a través del parámetro de desaceleración, el cual se puede obtener de la siguiente manera.

Considérese una expansión en serie de Taylor del factor de escala  $a$ , alrededor del tiempo presente ( $t_0$ ), es decir,

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots, \quad (1.39)$$

dividiendo todo entre  $a(t_0)$  se tiene,

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{1}{2}q_0H_0^2[t - t_0]^2 + \dots, \quad (1.40)$$

que define al parámetro de desaceleración como,

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}. \quad (1.41)$$

Ahora, de la ecuación de aceleración del Universo (1.24), considerando  $P = 0$ , para materia que no ejerce presión como lo son la colección de galaxias, y tomando en cuenta la definición de la densidad crítica se tiene que,

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_m^0 - \Omega_\Lambda^0. \quad (1.42)$$

Significa que, si se conoce la cantidad de materia en el Universo se puede saber como éste se desacelera. Se puede definir el parámetro de desaceleración en función del tiempo como:

$$q(t) = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)H^2(t)}. \quad (1.43)$$

Uno de los conceptos más usados en Cosmología es el *corrimiento al rojo*, ya mencionado anteriormente, éste se puede entender como sigue. Piense en el fluido cósmico compuesto de partículas con líneas de mundo igual a geodésicas, considerando su momento  $p(t)$  en cada instante de tiempo por un observador comóvil en reposo, ya que éste se mueve con el fluido. El fluido en un tiempo infinitesimal  $dt$  viaja entre observadores cercanos separados por una distancia  $vdt$ , con  $v$  la velocidad del fluido medida por cualquier observador. Tomando en cuenta la velocidad relativa  $u = dr/dt$  de estos observadores, para cada instante se tendrá:

$$du = \frac{\dot{a}}{a}vdt = \frac{da}{a}v, \quad (1.44)$$

$u$  es la velocidad debida a la expansión. Ahora, aplicando el cuadrimento  $(E, \mathbf{p})$  y del hecho de que  $E = \gamma mc^2$  y  $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ , se tiene<sup>10</sup>:

$$dp = -Edu = -\frac{p}{v}du, \quad (1.45)$$

como lo que se pretende es obtener el cambio en el momento de las partículas al viajar de un observador a otro. Por lo tanto, al usar la ecuación anterior se encuentra que  $dp/p = -da/a$ , integrando esta relación a lo largo del camino de la partícula, es decir, desde el valor del momento de la partícula cuando es emitido, hasta cuando es detectado por algún observador, se tiene,

$$p(t) = \frac{a_0 p_0}{a(t)}, \quad (1.46)$$

el momento, medido por una secuencia de observadores, cae como  $1/a$  en un universo en expansión (si fuese un universo en contracción, entonces el momento aumentaría). Por convención, se normaliza el factor de escala como  $a_0 = 1$ , que representa su valor hoy en día. Al considerar que las partículas son fotones, su energía es  $E = p = h\nu$ , al sustituir en la ecuación (1.46),

$$\nu(t) = \frac{E_0}{h} \frac{1}{a(t)}, \quad (1.47)$$

donde  $E_0$  es la energía del fotón medida por algún observador. Si ahora se toma que,  $\nu = 1/\tau = 1/\lambda$  y  $\lambda = h/E$ , donde  $h$  es la constante de Planck, entonces,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda(t)} = \frac{a_0}{a(t)} = \frac{1}{a(t)}, \quad (1.48)$$

---

<sup>10</sup> $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ , además se debe tomar en cuenta que  $c = 1$ .

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda del fotón medida por algún observador. El corrimiento al rojo cosmológico se define como:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (1.49)$$

donde “obs” se refiere al observado y “em” al emitido. Usando la ecuación (1.48) se encuentra finalmente que:

$$1 + z(t) = \frac{1}{a(t)}. \quad (1.50)$$

La ecuación (1.50), representa el corrimiento al rojo o al azul, dependiendo de si los objetos se alejan o se acercan de nosotros, respectivamente, debido a la expansión o contracción cósmica. El corrimiento al rojo se tiene cuando  $z > 0$  y el corrimiento al azul cuando  $z < 0$ . El corrimiento se caracteriza por la diferencial relativa entre las longitudes de onda observadas y emitidas de un objeto.

## 1.4. Historia térmica del Universo

Poco después de que ocurriera el Big Bang, en un tiempo de aproximadamente  $t = 1 \times 10^{-34} s$ , una temperatura de  $T = 1 \times 10^{27} K$  y una energía de  $E = 1 \times 10^{14} GeV$ , existió un periodo de expansión acelerada, anterior a la expansión actual y de naturaleza diferente; llamada *inflación cosmológica*. La inflación fue propuesta por A. Guth en 1981 y provee al Big Bang el conjunto de condiciones iniciales, en los campos de materia ( $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}$ ), que son necesarias para explicar la evolución de las perturbaciones, que dan origen a la formación de estructura, en Cosmología estándar. La descripción del Universo según el modelo estándar de Cosmología, del que se hablará más adelante, presenta al menos dos problemas: la planitud y la homogeneidad entre regiones que estaban causalmente desconectadas. Los modelos de la inflación los solucionan, aunque inicialmente la inflación no formaba parte del modelo estándar, ahora se considera incorporado a este modelo estándar de Cosmología. Cuando la inflación se detuvo, la enorme densidad del campo inflatón se convirtió en partículas que pronto fueron termalizadas. A dicho proceso se le llama *recalentamiento del Universo*. Aquí comienza la época de radiación. En el Universo sólo había un plasma de quarks-gluones y otras partículas elementales como leptones y bosones, todas se movían con velocidades relativistas, es decir, con velocidades cercanas a la de la luz. Después viene el proceso de la *bariogénesis* que es cuando se empezaron a formar los bariones, como los protones, neutrones y sus respectivas anti-partículas, todas ellas interactuaban por medio de la creación y destrucción de pares. El Universo siguió expandiéndose y enfriándose hasta llegar a una temperatura de  $T = 1 \times 10^{10} K$ , en  $t = 1 s$ , con una energía de  $E = 1 MeV$ , en este momento ocurre el desacople de los neutrinos provocando que éstos puedan viajar libremente por el cosmos con un momento  $p \propto 1/a$ , como lo muestra la ecuación (1.46). También ocurre la nucleosíntesis del Big Bang, los protones y neutrones comienzan a fusionarse para formar núcleos de los elementos ligeros:  $^1H, ^2D, ^3He, ^4He$ .

Al examinar un poco lo que sucede en  $t = 1s$ , a partir del Big Bang, se debe tomar en cuenta que, todas las partículas del Universo se encuentran en equilibrio termodinámico, sí y sólo si, el tiempo de interacción entre ellas es menor que el tiempo de Hubble. El tiempo de Hubble es  $H^{-1}$  y la distancia de Hubble es  $cH^{-1}$  y son de mucha importancia, pues representan el tamaño del horizonte causal. Sus valores actuales son:

$$\begin{aligned} H_0^{-1} &\simeq 13.7 \text{ Gyr}, \\ cH_0^{-1} &\simeq 4.3 \text{ Gpc}. \end{aligned}$$

Asumiendo que las partículas se comportan como un gas ideal<sup>11</sup> en equilibrio termodinámico, para cada especie de partículas, la función de distribución que se obtiene al resolver la ecuación de Boltzmann, con colisiones, esta dada por [29]:

$$f_i(p) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i(p) - \mu_i(T)}{T}\right) \pm 1}, \quad (1.51)$$

donde el subíndice  $i$  indica alguna especie de partícula, ya sean fotones ( $\gamma$ ), protones ( $p$ ), electrones ( $e^-$ ), neutrones ( $n$ ), etc. El momento está representado por  $p$ ,  $\mu_i$  es el potencial químico de las partículas. El signo (+) es para fermiones (partículas con espín semi-entero) y el signo (-) es para bosones (partículas con espín entero). Suponiendo que  $\mu_i$  y  $m_i$  son despreciables en comparación con la energía, se tiene,

$$f_i(p) = \frac{1}{e^{p/T} \pm 1}, \quad (1.52)$$

para los fotones, la ecuación (1.52), es la distribución de cuerpo negro. A partir de la función de distribución se obtiene la densidad numérica de partículas  $n_i$ , dada por:

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{p/T} \pm 1} dp = \frac{\zeta(3)g_i}{\pi^2} T^3 \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 3/4 & \text{fermiones} \end{cases}, \quad (1.53)$$

con  $g_i$  el número de estados del espín y la función zeta de Riemann dada por  $\zeta(3) = 1.202\dots$ . Así la densidad de energía para cada especie de partículas es,

$$\rho_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3}{e^{p/T} \pm 1} dp = \frac{\pi^2 g_i}{30} T^4 \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 7/8 & \text{fermiones} \end{cases}, \quad (1.54)$$

acorde con la expresión, la energía promedio por partícula es del orden de  $k_B T \gg m_i c^2$ , por lo tanto las partículas son relativistas. La densidad de energía total de todas las partículas con distribución de cuerpo negro es,

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, \quad (1.55)$$

---

<sup>11</sup>Los diferentes campos de materia del Universo como radiación, materia bariónica, neutrinos y materia oscura se comportan, después de la superficie de última dispersión, como gases ideales.

donde,

$$g_*(T) = \sum_{\text{bosones}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermiones}} g_i. \quad (1.56)$$

Esta expresión nos describe la densidad total del Universo debido a fotones y/o fermiones relativistas, es útil para calcular el factor de Hubble a través de la ecuación (1.23).

Un parámetro cosmológico importante es el número de bariones por fotón en el Universo temprano, usualmente denotado por  $\eta$ , y es que, para este tamaño del Universo, el número de partículas de cada especie es enorme y no tiene sentido hablar de cuantas partículas de cada especie había, sino cual es la proporción entre cada una de ellas. Se encuentra que la proporción es [29],

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \equiv \frac{n_{\text{bariones}} - n_{\text{anti-bariones}}}{n_\gamma} \approx (6.1 \pm 0.2) \times 10^{-10}, \quad (1.57)$$

la ecuación (1.57) muestra que el número de bariones es mucho menor que los fotones. Debió existir una desigualdad entre los bariones y los antibariones o de lo contrario jamás se hubieran formado los átomos ni la estructura como la conocemos hoy en día. Ya que  $\eta$  ha quedado constante en el tiempo, pues como el Universo se iba expandiendo y la temperatura iba disminuyendo, las partículas y antipartículas ya no interactúan a través de la creación y destrucción de pares. Así que, lo que ahora importa es la proporción entre los bariones, es decir, entre los protones y neutrones. Entonces, cuando la temperatura decae a unos pocos MeV, están en equilibrio los procesos de decaimiento de los protones y neutrones, al igual que el de los fotones, y la proporción queda determinada por,

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(\frac{m_p - m_n}{T}\right) \approx \exp\left(-\frac{1.5 \times 10^{10} K}{T}\right), \quad (1.58)$$

donde  $m_n - m_p = 1.3$  MeV, la proporción se congela en  $\frac{n_n}{n_p} \approx \frac{1}{6}$  ya que en ese momento las partículas se sale del equilibrio<sup>12</sup> dando lugar a formación de los primeros núcleos atómicos de los elementos ligeros. La proporción entre partículas queda determinada cuando el Universo es dominado por la radiación, ver figura (1.6).

Después de la bariogénesis, el Universo siguió expandiéndose y enfriándose hasta cuando la temperatura era de  $T \approx 3 \times 10^4 K$ , con una energía de  $E \approx 1 MeV$  y una edad aproximada de  $t = 380,000$  años, en ese momento la radiación y la materia igualaron sus densidades de energía. Al estudiar esta parte, tomando  $k = 0$ , despreciando la constante cosmológica, la ecuación de Friedmann resulta ser:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_\gamma), \quad (1.59)$$

---

<sup>12</sup>Debido al decaimiento del neutrón hasta el tiempo en que la nucleosíntesis comienza  $\frac{n_n}{n_p} \approx \frac{1}{7}$ .

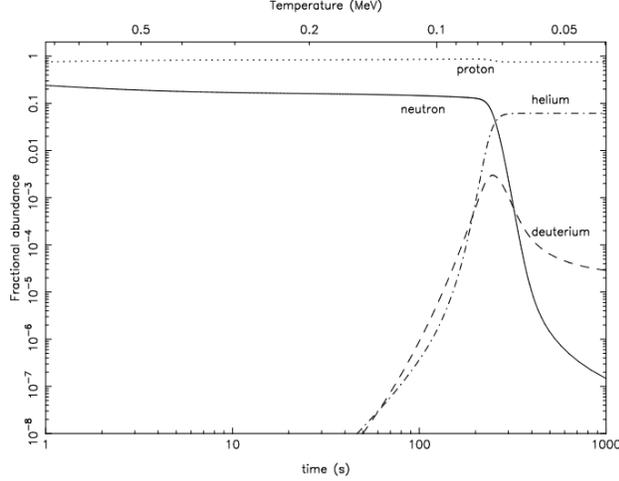


Figura 1.6: Evolución de la fracción de masa para diferentes especies (protones, neutrones, núcleos de helio y deuterio) durante la nucleosíntesis. La abundancia fraccional es  $X_a = n_a/(n_a + n_p)$ , donde  $a$  indica alguna especie. Tomado de [67].

donde  $\rho_m = \rho_b + \rho_{mo}$ , donde  $\rho_b$  es la densidad de energía de los bariones,  $\rho_{mo}$  es la densidad de energía de la materia oscura y  $\rho_\gamma$  es la densidad de energía de la radiación. Tomando en cuenta que  $\rho_m$  y  $\rho_\gamma$  son iguales, la densidad crítica del Universo será  $\rho_c^{eq} = \frac{3H_{eq}^2}{8\pi G}$  (eq  $\rightarrow$  igualdad), por lo tanto, la ecuación (1.59) resulta,

$$H^2 = \frac{1}{2}H_{eq}^2 (\Omega_m + \Omega_\gamma), \quad (1.60)$$

además como ya se vió  $\frac{\rho_m}{\rho_i} = \left(\frac{a_i}{a}\right)^3$  para materia y  $\frac{\rho_\gamma}{\rho_i} = \left(\frac{a_i}{a}\right)^4$  para la radiación (i=inicial), al sustituir la densidad inicial como la densidad de equilibrio y colocando el resultado en la ecuación (1.60), resulta,

$$H^2 = \frac{1}{2}H_{eq}^2 \left[ \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4 \right]. \quad (1.61)$$

El corrimiento al rojo para este momento es:

$$1 + z_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} = \frac{\left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^4}{\left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^3} = \frac{\Omega_\gamma}{\Omega_m} \simeq 3.3 \times 10^3. \quad (1.62)$$

Al considerar que  $1 + z = \lambda_0/\lambda_e = \nu_e/\nu_0 = E_e/E_o$ , además  $E = 3/2 k_B T$ , se tiene,

$$T_{eq} = T_o(1 + z_{eq}) \simeq 6.2 \times 10^3 \text{ K}. \quad (1.63)$$

L ecuación (1.63) representa la temperatura en el momento que  $\rho_m$  y  $\rho_\gamma$  eran iguales, con esto se puede ver que  $T \propto 1/a$ .

Durante algún tiempo después de la equivalencia entre materia y radiación, los fotones interactúan con los electrones (dispersión Thomson), como el Universo continuaba enfriándose por debajo de la energía de ligadura de los átomos, los electrones comenzaban a unirse con los núcleos de los elementos más ligeros dando lugar a los primeros átomos neutros. A este momento se le conoce como la época de *recombinación*. Las reacciones relevantes son  $e^- + p \rightleftharpoons H + \gamma$  para el hidrógeno y  $He^{2+} + e^- \rightleftharpoons He^+ + \gamma$  para el helio, aquí (2+) indica que el núcleo del helio tiene carga eléctrica igual a 2. La proporción entre la densidad numérica de electrones y protones se puede calcular a partir de la ecuación de Saha [64, pág. 121], usando aproximaciones analíticas para su solución uno encuentra,

$$\chi \equiv \frac{n_e(t)}{n_p(t)} = 1.1 \times 10^8 z^{-1} e^{-14400/z}. \quad (1.64)$$

Si  $z$  es 1050, entonces,  $\chi \approx 0.11$ . La ecuación (1.64) establece la proporción entre número de electrones y protones en la época de la recombinación.

El enfriamiento permite que la radiación se desacople de la materia provocando que la luz pueda viajar libremente por el espacio. Esto ocurre aproximadamente en  $T \approx 3 \times 10^3 K$ . A esta época se le llama la *época de última dispersión*. Dicha radiación desacoplada es la famosa *Radiación del Fondo Cósmico de Microondas* (RFCM, o simplemente, RCF), ver figura (1.7). Una vez que la radiación viaja libremente

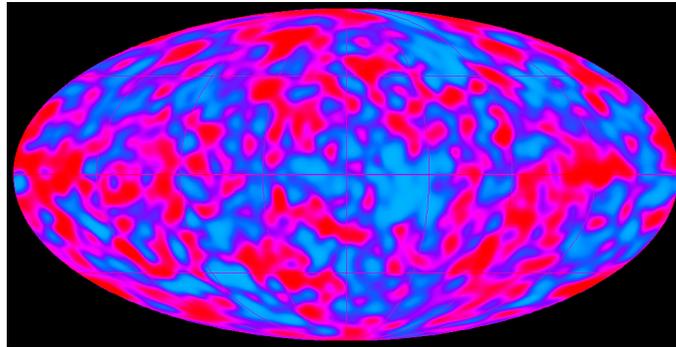


Figura 1.7: Mapa de las fluctuaciones de temperatura de la RCF en diferentes regiones del cielo, hecho por COBE entre los años 1990 y 1992. Las regiones azules muestran una menor temperatura con respecto a las zonas rojas. Tomado de [4].

comienza la época en que el Universo es dominado por la materia.

La RCF fue predicha en cálculos publicados por G. Gamow en 1948, junto con Ralph Alpher y Robert Herman. Años después la RCF fué descubierta por Arno Penzias y Robert Wilson en los laboratorios Bell, Nueva Jersey. El descubrimiento fue muy curioso pues se les encomendó la tarea de calibrar una antena de microondas usada para telecomunicaciones y astronomía, pero se encontraron con un inexplicable ruido en la señal distribuido uniformemente en el cielo que no podían quitar de ninguna forma. Lo que no sabían ellos es que Robert Dicke acababa de predecir un

fondo de radiación anisótropo de microondas para el Big Bang. Cuando Dicke se enteró del resultado de Penzias y Wilson llamó a los laboratorios Bell para aclarar los resultados. Finalmente en 1978 Penzias y Wilson fueron galardonados con el premio Nobel de Física. Las primeras mediciones de la RCF se hicieron por medio del satélite COBE (Cosmic Background Explorer) puesto en órbita en 1989. Descontada la corrección del movimiento del sistema Solar y nuestra galaxia, los datos de los bolómetros demuestran un Universo con pequeñas anisotropías mostradas en la figura (1.7) y los datos del espectrómetro demuestran que el remanente de la radiación tiene un espectro de cuerpo negro<sup>13</sup>, con una temperatura de  $T \sim 3 K$ , ver figura (1.8). De hecho es el espectro de cuerpo negro más finamente medido en la naturaleza.

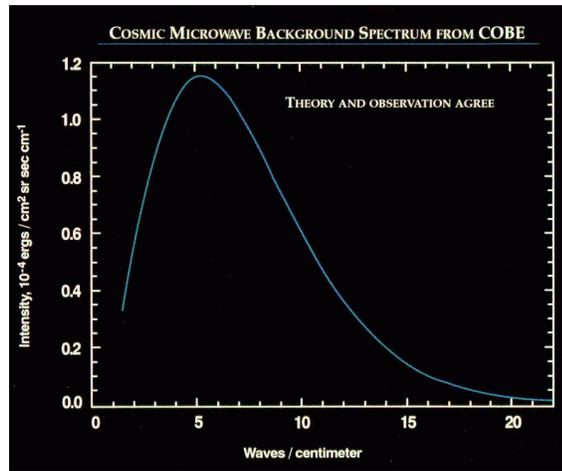


Figura 1.8: Espectro de cuerpo negro de la RCF medido por COBE. Tomado de [2].

Cuando habían transcurrido  $10^8$  años, a partir del Big Bang, se produjo la *reionización*, que es el proceso en que el hidrógeno se ioniza de nuevo. Esto sucede ya que la materia empieza a colapsar dando lugar a la formación de las primeras estrellas, las cuales emiten radiación ultravioleta que recalienta las nubes de hidrógeno hasta ionizarlo. Con el paso del tiempo, con  $t > 10^9$  años, se comenzaron a formar las galaxias y los cúmulos de galaxias en la época de la *formación de estructura*, ver figura (1.9). Al principio la densidad de energía oscura era mucho menor que la densidad de materia, pero con la expansión la segunda disminuye según la ecuación (1.29) y la primera permanece constante (en caso de constante cosmológica), por lo que eventualmente ambas densidades se igualaron, y de aquí en adelante el Universo es dominado por la energía oscura. Finalmente, gracias a la muerte de algunas estrellas se origina el Sol y el sistema Solar, hoy a  $t \approx 13.8 \times 10^9$  años después, en la Tierra se contempla la vida biológica. La pregunta de vida en otros exoplanetas es un tema diferente y también muy importante.

<sup>13</sup>El cuerpo negro es un objeto que absorbe o emite radiación con una eficiencia del 100%. Si este cuerpo negro se mantiene a una temperatura dada, a través de un baño constante de calor, y se registra la intensidad de radiación que emite en cada una de las frecuencias, se obtendrá una

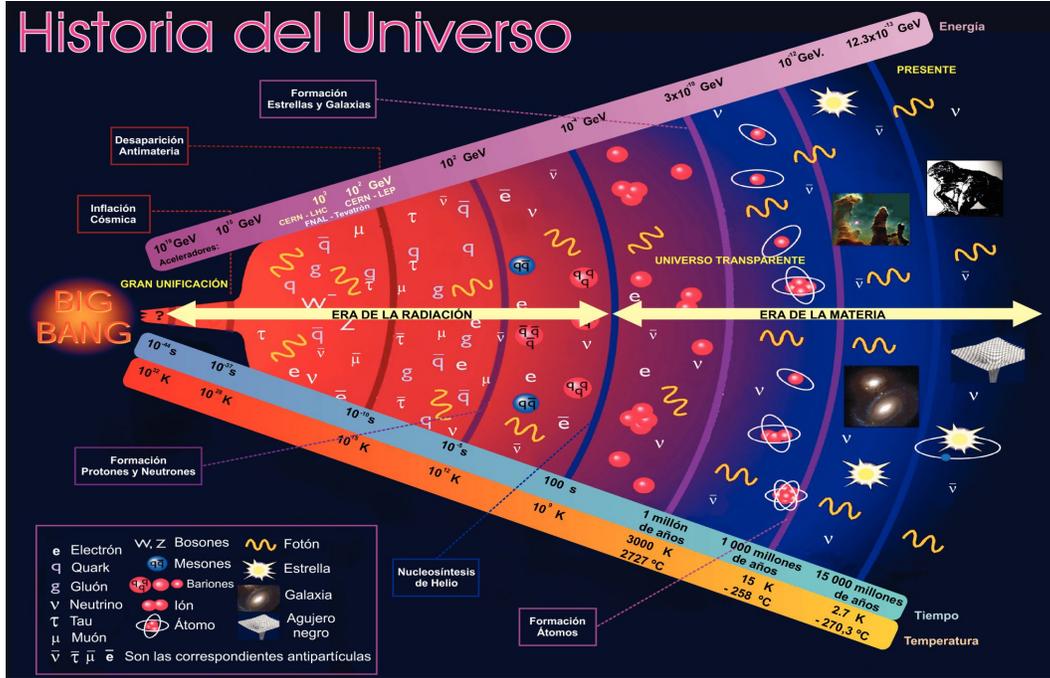


Figura 1.9: Evolución del Universo a través del tiempo. Tomado de [9].

## 1.5. Modelo estándar de Cosmología

La disciplina de la Cosmología debe estar bien cimentada bajo bases sólidas de conceptos físicos y de algunos postulados. Se entiende como modelo estándar de Cosmología o Cosmología estándar a los modelos cosmológicos que satisfacen el principio cosmológico, la RG como teoría correcta de gravedad, la estructura geométrica de fondo dada por la métrica de FLRW y una dinámica a partir de las ecuaciones de Friedmann, ecuaciones (1.23-1.26).

Existen varios modelos propuestos, pero el más aceptado, y el que se usará en este trabajo, es el *Modelo  $\Lambda$ CDM*, que es considerado el Modelo estándar de la Cosmología y está basado justamente en la métrica de FLRW. Este es el modelo más favorecido por las observaciones, ya sea de la RCF o de las supernovas tipo Ia, de las que se hablará más adelante. Para explicar la evolución del Universo después de la nucleosíntesis, se necesitan dos componentes más para el fluido cósmico: Se requiere un tipo de materia no bariónica denominada materia oscura fría (CDM por sus siglas en inglés, cold dark matter) con interacción despreciable consigo misma y con otras partículas; también se necesita la densidad de energía oscura independiente del tiempo, cuya presión es negativa y con un corrimiento al rojo  $z \sim 1/2$ . Además se necesita de una perturbación en la curvatura. El modelo  $\Lambda$ CDM, más simple, toma la interacción de CDM completamente nula y toma la densidad de energía oscura totalmente constante. Si se toma por sentado la temperatura medida con precisión de la RCF, el modelo  $\Lambda$ CDM más simple necesita, en principio, sólo tres parámetros

curva espectral para esa temperatura, llamada espectro de la radiación de cuerpo negro.

para describir el Universo no perturbado, así que se toman el parámetro de Hubble  $H$ , el parámetro de densidad de bariones  $\Omega_b$  y el parámetro de densidad de materia total  $\Omega_m$ . Para describir las perturbaciones en la curvatura hacen falta dos parámetros más, los cuales deben describir la amplitud  $A$  del espectro inicial y el índice espectral  $n_s$ . Para el caso de la amplitud, se usa  $\sigma_8$  y se refiere a la amplitud del espectro de potencias medido hoy en día a una distancia de 8 Mpc, más adelante se verá que es el espectro de potencias. El índice espectral  $n_s$  se refiere a la condición inicial de las perturbaciones (de una función) y guarda una relación con el espectro de potencias dada por:  $P(k) = A(k)^{n_s-1}$ , donde  $A$  es una amplitud constante y  $n_s \sim 0.96$ . Finalmente se necesita un sexto parámetro para especificar el efecto de la reionización del medio cósmico. El parámetro adecuado es la profundidad óptica  $\tau$ , tal que  $e^{-\tau}$  es la probabilidad de que un fotón emitido antes de la reionización (pero después del desacople de los fotones) sea redispersado. Los tres últimos parámetros mencionados ( $\sigma_8, n_s, \tau$ ) pertenecen a las perturbaciones o a la física no lineal [29].

Con estas suposiciones, la evolución del Universo en la Cosmología estándar está caracterizada por cuatro épocas importantes ya mencionadas; la época de la inflación, de la radiación, de materia y actualmente existe el dominio de la energía oscura. Hoy en día existen un conjunto de parámetros cosmológicos con valores precisos y márgenes de error pequeños que conforman la llamada *Cosmología de precisión*. El modelo estándar de Cosmología se respalda a través de estos parámetros, ver tabla (1.1).

Parámetro	Descripción	Valor (hoy)
Constante de Hubble	$H_0$	$67.74 \pm 0.74 \frac{km}{s \cdot Mpc}$
Tasa de expansión adimensional	$h$	$0.6774 \pm 0.0074$
Índice espectral	$n_s$	$0.9667 \pm 0.0040$
Edad del Universo	$t_0$	$13.798 \pm 0.037 \text{ Gyr}$
Temperatura de la RCF	$T_0$	$2.718 \pm 0.0021 K$
Parámetro de la densidad	$\Omega$	$1 \pm 0.0062$
Densidad física de materia oscura	$h^2 \Omega_{mo}$	$0.1188 \pm 0.0010$
Densidad física bariónica	$h^2 \Omega_b$	$0.02230 \pm 0.00014$
Densidad de energía oscura	$\Omega_\Lambda$	$0.6911 \pm 0.0062$
Densidad de materia	$\Omega_m$	$0.3089 \pm 0.0062$
Profundidad óptica	$\tau$	$0.066 \pm 0.012$
Amplitud del espectro de potencias	$\sigma_8$	$0.8159 \pm 0.0086$
Ecuación de estado para la energía oscura	$\omega$	$-1.006 \pm 0.045$

Cuadro 1.1: *Parámetros de la base del modelo  $\Lambda$ CDM. Ilustra la consistencia de los parámetros determinados a partir de los espectros de la temperatura y la polarización a altos multipolos. Tomado de [15]. La edad del Universo fue tomado de [14].*

## 1.6. Observaciones Cosmológicas

Los modelos cosmológicos, como todos los modelos estudiados por la Física, deben ser comprobados a través de las observaciones. En el caso de la Cosmología debe ser confrontada con observaciones astronómicas (como BAO y la RCF), las cuales se clasifican en dos tipos, las observaciones sobre el cono nulo y las observaciones del tipo geológico. Las primeras nos muestra que sucede muy lejos de nosotros, es decir, lo que pasó hace mucho tiempo en el Universo (siempre se mira al pasado del Universo). Las segundas, cuando son relacionadas, con teorías acerca de los orígenes, las cuales dan información sobre nuestra línea de mundo, es decir, el pasado de hace mucho tiempo (por ejemplo, la determinación local de los elementos está relacionado con las cálculos de la nucleosíntesis). En la actualidad las observaciones son llevadas acabo por gran parte del espectro electromagnético, las lentes gravitacionales y las mediciones de alta precisión de la RCF.

Las primeras mediciones de precisión de la RCF fueron hechas por el satélite COBE, ver figura (1.7). Éste demostró una importante característica de la RCF y es el hecho de que es casi isotrópica, es decir, que tiene la misma temperatura en todas direcciones. Los modelos cosmológicos predicen que la RCF debé tener ciertas anisotropías para que puedan existir las galaxias y demás componentes del Universo. Lo que sugiere es que en cierto momento, deberían existir anisotropías en la época de última dispersión. Para poder detectar tales anisotropías, ver figura (1.7), el receptor de éstas debe estar fuera de las perturbaciones de la atmósfera terrestre y así tener mediciones más exactas. Se comprobó que la luz proveniente es casi isotrópica con desviaciones de una parte en cien mil,  $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$ , en diversas direcciones del espacio. Con ésto, COBE en 1989 (tuvo que ser enfriado a 1.5 K para tener una mejor precisión) midió el espectro de la RCF encajando correctamente con la radiación de cuerpo negro, ver figura (1.8). Así se comprueban los modelos de perturbaciones iniciales y el modelo del Big Bang caliente predichos por los modelos inflacionarios en los años 80 [10, 46, 44, 59].

Las medidas, a ángulos pequeños, de las anisotropías aún eran necesarias, al menos, a una escala menor a  $1^\circ$  en el cielo, para poder distinguir aquellas perturbaciones que darían lugar a la formación de estructura. Dado que el satélite COBE poseía restricciones a ángulos menores de  $7^\circ$ , se necesitaba de algún experimento que describiera las perturbaciones a ángulos pequeños. Dos experimentos novedosos, con base en la Tierra, pudieron con tal desafío, a pesar de que debían realizarse a grandes alturas para minimizar las perturbaciones atmosféricas. El globo BOOMERANG (Ballon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics) realizó un vuelo sobre la Antártida (los lugares fríos son ideales pues la delgada atmósfera fría y seca minimiza la perturbaciones atmosféricas), en 1998. La sensibilidad del instrumento permitió una medida en las fluctuaciones de la temperatura de la RCF sobre una amplia gama de escalas angulares. El otro experimento, llamado MAXIMA (Millimetric Anisotropy Experiment Imaging Array), su sensibilidad era mayor que la de BOOMERANG. MAXIMA exploró dos veces una región

del cielo para comparar mediciones y eliminar ruidos indeseables, una vez en 1998 y la otra al siguiente año. Ambos experimentos tuvieron éxito. Los experimentos midieron las anisotropías en los fotones que habían estado oscilando desde que se crearon los primeros elementos durante la nucleosíntesis hasta la superficie de última dispersión. El Universo, compuesto por un plasma de iones de hidrógeno, electrones y fotones, tenía pequeñas fluctuaciones que servirían como semillas en la formación de estructura, tales fluctuaciones, con un patrón oscilatorio, se ve como oscilaciones acústicas en escalas angulares menores a  $1^\circ$ . Las oscilaciones amplificarían una cresta o un valle en la longitud de onda de la RCF. Estos dos experimentos midieron esos picos acústicos del espectro angular [59].

Un tercer experimento que superaría las expectativas de sus predecesores, lanzado en 2001, poseía una resolución de 13 arco-minutos, 45 veces la sensibilidad y 33 veces la resolución angular del COBE este era el satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). WMAP pudo detectar diferencias de temperatura del orden de  $10^{-5} K$ . Las oscilaciones acústicas en el mapa de temperaturas que también midió BOOMERANG y MAXIMA, los midió WMAP [59].

Años más tarde el satélite Planck, puesto en órbita en 2009, con el propósito de medir las anisotropías de la RCF, capturó datos por 4 años, hasta que en 2013 publicó sus primeros resultados mostrando el mejor mapa nunca antes visto de la RCF, ver figura (1.10). Después, en 2015, se publican las últimas observaciones

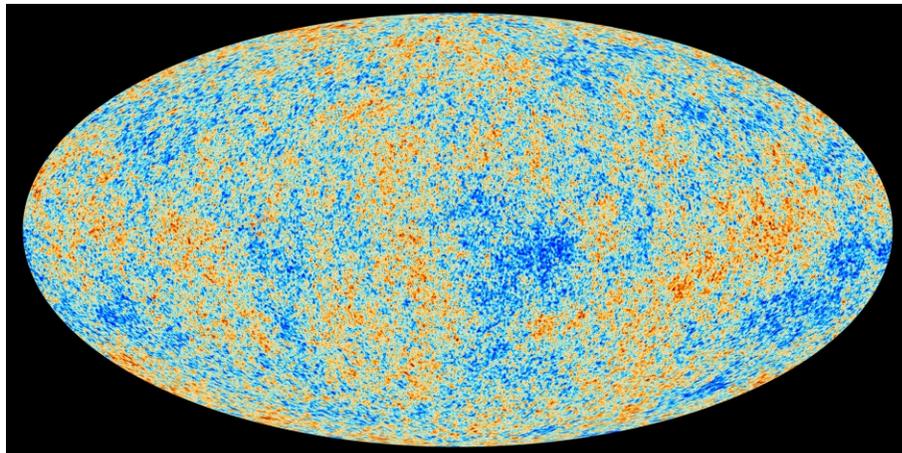


Figura 1.10: *Mapa de todo el cielo de la RCF. El mapa muestra diminutas fluctuaciones de temperatura que corresponde a las regiones de densidades ligeramente diferentes; que representa las semillas de toda futura estructura como las estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias de hoy. Tomado de [4].*

hechas por Planck, y bajo un análisis detallado del espectro de potencias de la temperatura y la polarización de la luz proveniente de la RCF, se encuentra que son compatibles al modelo  $\Lambda$ CDM, con seis de los parámetros cosmológicos más importantes y con un universo espacialmente plano, además un espectro de ley de

potencias de las perturbaciones escalares adiabáticas<sup>14</sup>, ver figura (1.11). Algunos de los valores obtenido por Planck se ven en la tabla (1.1).

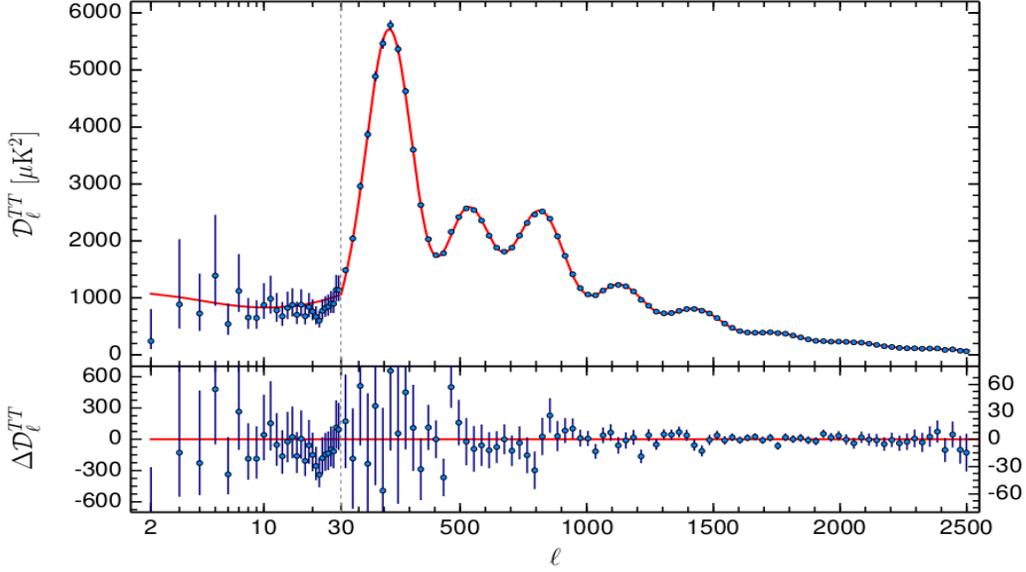


Figura 1.11: *Espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo.*  $D_l^{TT} = l(l+1)C_l/2\pi$ ,  $l$  es la escala angular.  $\Delta D_l^{TT}$  es el error del mejor ajuste (línea roja) con respecto a las mediciones. Tomado de [15].

La constante de Hubble también se mide a través de las *supernovas*, que son las explosiones colosales de las estrellas. La explosión produce varias formas de radiación electromagnética que pueden ser detectadas a grandes distancias. Un tipo de supernovas son las *Ia*, las cuales son pobres en hidrógeno y tienen un pico en sus curvas de luz, es decir tiene una luminosidad máxima. Las explosiones se dan en sistemas binarios compuestos de una gigante roja y una enana blanca. Al tener menos masa la gigante roja, la enana blanca comienza a adquirir la masa de ésta. Los electrones en una enana blanca forman lo que se conoce como un *gas degenerado de electrones*, la presión que ejerce este gas se debe al principio de exclusión de Pauli y la relación entre presión y densidad derivada de la estadística de Fermi-Dirac es muy diferente al que se obtendría en el caso clásico. El equilibrio entre la presión gravitacional y la presión de degeneración del electrón continua mientras la masa de la enana blanca aumenta, sin embargo, se alcanza un límite cuando la masa de la

<sup>14</sup>Donde se tiene que  $D_l^{TT} = l(l+1)C_l/2\pi$ ,  $l$  es la escala angular. Los armónicos esféricos pueden usarse para realizar la descomposición de una función arbitraria que se encuentre sobre una esfera, para éste caso, la esfera es el cielo y la función es el mapa de temperaturas en forma de serie como:  $\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$ . El espectro de potencias viene dado por el cuadrado de los coeficientes de los armónicos esféricos  $a_{lm}$  en la forma:  $C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m a_{lm}^2$ , de modo que la temperatura asociada a un valor determinado de  $C_l$  se puede deducir como  $\frac{\Delta T}{T} = \sqrt{\frac{l(l+1)C_l}{2\pi}}$ .

enana blanca tiene un valor crítico de  $1.44 M_{\odot}^{15}$ . A este valor se le conoce como el límite de Chandrasekhar. A partir de este punto la presión gravitacional excede la presión de degeneración y la fusión de los núcleos de carbono comienzan dentro de la enana blanca [59]. Como su núcleo está rodeada por capas en las que se realiza la combustión de elementos más ligeros haciendo que en algún momento ocurra la explosión. Una vez que se sabe en que momento ocurre la explosión, también se puede saber la intensidad de radiación electromagnética que se emite. Con ésto, se puede saber la distancia, cuanto más lejos se encuentren el brillo que nos llega de ellas es menor. Las observaciones de supernovas distantes poseen una longitud de onda más elongada, lo que es consistente con un modelo en expansión del Universo. De aquí proviene la primera evidencia experimental importante para la energía oscura. La expansión se ve a través del corrimiento al rojo, ya que, la longitud de onda de la luz que llega de las supernovas se encuentra corrida hacia el rojo con un valor mayor al valor esperado por el corrimiento debido a la expansión no acelerada, ver figura (1.12).

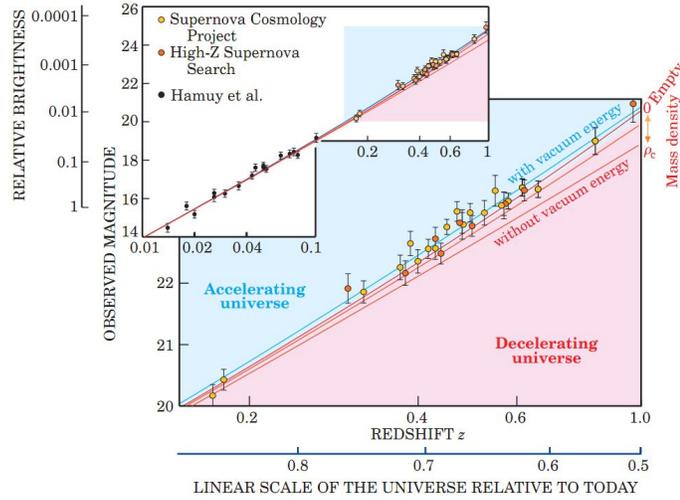


Figura 1.12: La pendiente de la curva determina la constante de Hubble. Se muestra la necesidad de una constante o función cosmológica. Tomado de [6].

Otro concepto importante, relacionado con las observaciones, está asociado a la definición de distancia, de hecho, existen varias maneras de medir distancias en un Universo en expansión. Una manera, es a través de la luminosidad de los objetos estelares, para calcularla se hace lo siguiente. La distancia  $d_L$  se conoce como distancia luminosa,  $L_s$  es la luminosidad absoluta de alguna fuente y  $F$  es el flujo de energía y las cantidades se relacionan como sigue,

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi F}, \quad (1.65)$$

es decir, el flujo medido disminuye con el cuadrado de la distancia. Para un Universo en expansión  $L_s = L_0(1 + z)$ , donde  $L_0$  es la luminosidad observada, la luz viaja

<sup>15</sup> $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33}g$ , es la masa de nuestro Sol.

a lo largo de la dirección  $x$  satisfaciendo la ecuación de la geodésica  $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 = 0$ , la energía por unidad de área y por unidad de tiempo observada es entonces  $F = L_0/[4\pi(a_0x)^2]$ , así la ecuación (1.65) para un Universo en expansión es:

$$d_L = a_0x(1+z), \quad (1.66)$$

al tomar en cuenta que,

$$x = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')}, \quad (1.67)$$

donde  $h(z) = H(z)/H_0$ , además la ecuación de Friedmann (1.23) se puede escribir de la siguiente manera,

$$H^2(z) = H_0^2 \sum_i \Omega_i (1+z)^{3(1+\omega_i)}, \quad (1.68)$$

sustituyendo en la ecuación (1.66), la distancia lumínica, en geometría plana, esta dada por:

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_i (1+z')^{3(1+\omega_i)}}}. \quad (1.69)$$

Nótese que para valores pequeños de  $z$  se tiene  $d_L \sim z/H_0$  que es de hecho la ley de Hubble. La distancia lumínica, para dos componentes del fluido cósmico no relativista, que cumple con  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ , se muestra la gráfica en la figura (1.13).

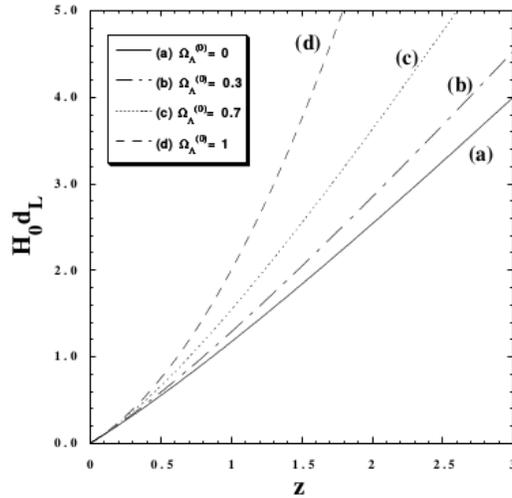


Figura 1.13: Distancia lumínica  $d_L$  en unidades de  $H_0^{-1}$  para dos componentes de un Universo plano y con un fluido no relativista ( $\omega_m = 0$ ) y constante cosmológica ( $\omega = -1$ ). En la figura se aprecia como  $H_0 d_L$  cambia para los diferentes valores de  $\Omega_\Lambda$ . El más próximo a las observaciones es (c). Tomado de [28].

La evidencia directa de la aceleración actual del universo se relaciona con la observación de las distancias de luminosidad de las supernovas con alto desplazamiento

al rojo. La magnitud aparente  $m$  de alguna fuente con una magnitud absoluta  $M$  está relacionada con la distancia luminosa a través de la relación<sup>16</sup>:

$$m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{Mpc} \right) + 25. \quad (1.70)$$

Debido a la expansión del Universo, la frecuencia de la luz recibida es corrida al rojo por la acción de que la distancia a la supernova se encuentra en expansión. Así,  $z \sim 0$  corresponde a los objetos próximos o que han experimentado menos expansión, mientras que a una  $z$  más grande, corresponde a objetos más lejanos o con una mayor expansión. De las mediciones de supernovas, ver figura (1.12), quedó claro también que se necesita materia y energía oscura en las proporciones mencionadas en la tabla (1.1).

En el presente trabajo se verá que si no existe materia y energía oscura, se explica este fenómeno a través de los modelos de gravedad modificada, donde la  $\Omega_\Lambda$  ahora será una  $\Omega_{GM}$ , es decir, una  $\Omega$  de gravedad modificada. Esto no es tarea fácil, puesto que, cualquier modelo de gravedad modificada debe explicar la expansión repentina del Universo y más aún que esta expansión sea acelerada. Actualmente existe un esfuerzo muy grande para probar que RG es la teoría correcta de la gravedad.

---

<sup>16</sup>La magnitud aparente  $m$  se refiere al brillo observado de alguna estrella así que ésta depende del instrumento con el que se mida. La magnitud absoluta  $M$  se refiere al brillo intrínseco de una estrella y se define como la magnitud aparente a una distancia de 10 parsecs de la estrella.

# Capítulo 2

## Perturbaciones cosmológicas

### 2.1. Formación de estructura

El estudio de la Cosmología se puede ver en tres partes, la Cosmología real (observacional), la Cosmología perturbada y la Cosmología no perturbada. En el capítulo anterior se estudió la Cosmología no perturbada. El problema que presenta una Cosmología no perturbada es que si el Universo es homogéneo e isotrópico, permanecerá homogéneo e isotrópico todo el tiempo cuando evoluciona a través de la métrica de FLRW, y entonces, nunca se podrá formar la estructura que se observa hoy en día. Así que, es necesario que al comienzo del Universo existan pequeñas inhomogeneidades de la densidad de energía. El estudio de la *formación de estructura* se encarga de dar una interpretación a la generación y la evolución de estas inhomogeneidades. Las fluctuaciones primordiales se amplificaron debido a la expansión del Universo y después su inestabilidad gravitacional hizo que se formara la estructura a gran escala. El problema de la formación de estructura se puede dividir en dos partes:

- la generación de las inhomogeneidades primordiales,
- el crecimiento debido a la evolución de esas inhomogeneidades en la estructura que se observa.

En este trabajo sólo se tomará la evolución de las inhomogeneidades. El tema de la generación se trata en el modelo estándar de Cosmología con la inflación, pero no es tema del presente trabajo.

Una suposición fundamental en la Cosmología moderna es que; muy temprano en la historia, el Universo fue casi perfectamente homogéneo, las estrellas, galaxias, cúmulos y supercúmulos se formaron por el crecimiento de las inestables fluctuaciones gravitacionales en la densidad  $\rho(\mathbf{x})$  de la materia bariónica y no bariónica.

Par empezar con el estudio de la formación de estructura, lo primero es considerar una esfera de radio  $R$  (de escala cosmológica) con una densidad de materia promedio  $\rho_0$  dentro de ésta, en algún instante dado, en regiones pequeñas existe una

perturbación ó sobredensidad de materia  $\delta\rho(\mathbf{x})$ , tal que, la densidad en cada punto es  $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x})$ . Así que, conviene trabajar con la densidad de contraste  $\delta(\mathbf{x})$  porque da una medida de como van creciendo las sobredensidades en cada región de la esfera. La densidad de contraste se define como:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\delta\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \rho_0}{\rho_0}, \quad (2.1)$$

se debe asumir que  $\mathbf{x}$  es una coordenada comóvil, además, en el régimen lineal  $|\delta| \ll 1$ . En el Universo real,  $\delta$  tiene un valor bien definido en cada posición  $\mathbf{x}$ , siguiendo un patrón estadísticamente homogéneo, sin depender de la ubicación de su centroide. Se debe pensar que  $\delta(\mathbf{x})$  es una variable aleatoria, y se dice que la función  $\delta$  define un campo aleatorio. Entonces, se debe remplazar el concepto de un Universo homogéneo por el de Universo *estadísticamente homogéneo*. Si la función  $\delta$  es continua, los valores (aleatorios) que toma en dos puntos cercanos  $\mathbf{x}'$  y  $\mathbf{x}' + \mathbf{x}$  deben estar correlacionados. El grado en que  $\delta(\mathbf{x}')$  y  $\delta(\mathbf{x}' + \mathbf{x})$  son mutuamente dependientes uno del otro está cuantificado por la **función de correlación** dada por,

$$\xi(\mathbf{x}) = \langle \delta(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) \rangle, \quad (2.2)$$

donde  $\langle \rangle$  indican promedios espaciales. Para el Universo, la función de correlación, de dos puntos, cuantifica la probabilidad de encontrar una galaxia a una distancia  $\mathbf{x}$ , dado que ya hay una galaxia, ver figura (2.1).

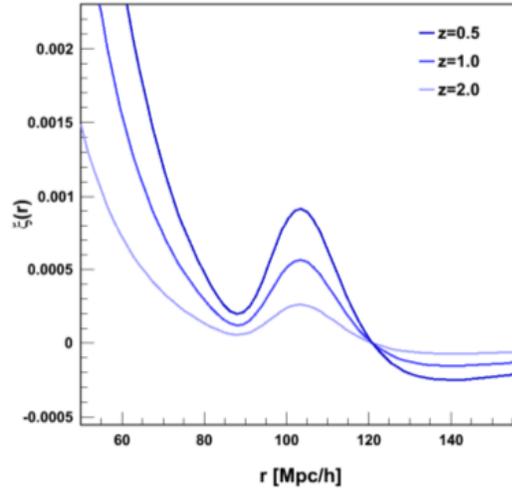


Figura 2.1: La función de correlación para las fluctuaciones de materia a distintos  $z$  en coordenadas comóviles. En la figura se observa un pico en la función de correlación, lo que significa que, a una distancia de 110 Mpc/h es más probable encontrar una galaxia. Más adelante se verá que esta distancia debe ser alrededor de 150 Mpc/h. Tomado de [73].

Si el Universo es estadísticamente homogéneo, la función de correlación no puede depender de la dirección del desplazamiento  $\mathbf{x}$ , pero sí de su magnitud  $x = |\mathbf{x}|$ , entonces la función de correlación tiene la siguiente forma,

$$\xi(x) = \langle \delta(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int d^3\mathbf{x}' \delta(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}' + \mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Al tomar un volumen muy largo pero finito,  $V$ , al cual se la aplican condiciones periódicas, implicará que las sobredensidades sean periódicas y se expandan como una serie de Fourier,

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{donde} \quad \delta_{\mathbf{k}} = \int_V d^3\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

además, se tiene que  $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/V^{1/3}$ , con  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , una suma triple que se realiza sobre todo  $\mathbf{n}$ . Notar que  $\delta_0 = 0$  porque  $\delta(\mathbf{x})$  tiene media cero por definición, además, si  $\delta(\mathbf{x})$  es real, entonces cumple que  $\delta_{-\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}}^*$ . Cuando se sustituye la expansión de Fourier (2.4) dentro de la ecuación (2.2) se obtiene,

$$\xi(x) = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \langle \delta_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}} \rangle e^{i(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.5)$$

el lado derecho no puede depender de  $\mathbf{x}'$ , pues se requiere  $\xi(x)$  y no  $\xi(x')$ , al tomar  $\langle \delta_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}} \rangle = 0$  si  $\mathbf{k}' \neq -\mathbf{k}$ ,

$$\xi(x) = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}} \langle \delta_{-\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}} \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.6)$$

donde  $P(\mathbf{k}) = \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle / V$  es el *espectro de potencias* del campo aleatorio<sup>1</sup>, ver figura (2.2).

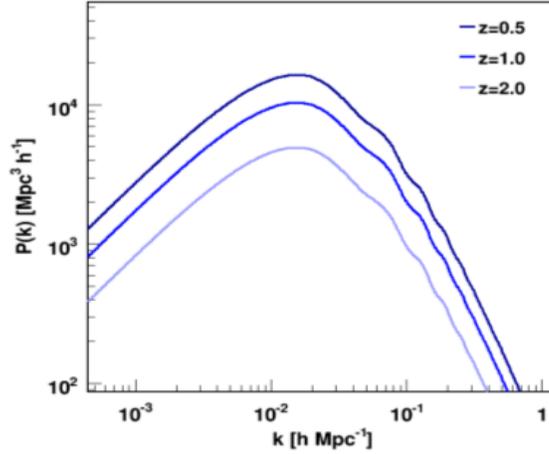


Figura 2.2: El espectro de potencias para las fluctuaciones de materia en la Cosmología de WMAP7 para varios corrimientos al rojo. En el espacio de Fourier las sobredensidades se observan como pequeñas oscilaciones. Tomado de [73].

<sup>1</sup>El término *espectro de potencias* se originó a partir del campo de la ingeniería eléctrica, donde esto se refiere a la potencia por unidad de frecuencia de alguna señal variable en el tiempo. En física, la señal puede ser algún tipo de onda. En Cosmología  $P(k)$  cuantifica la escala-dependiente de la densidad de perturbación, en términos de una superposición de ondas con número de onda  $k = 2\pi/\lambda$ , con  $\lambda$  siendo la longitud de onda.

Por lo tanto, el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de correlación, así que, también debe cumplir con la condición de isotropía, por lo tanto,  $k = |\mathbf{k}|$ . Los coeficientes de Fourier,  $\delta_k$ , son números complejos, donde la amplitud real define un espectro de potencias, el factor de fase compleja juega un rol en la determinación de la forma de una fluctuación. Se define la varianza de la densidad de contraste, relacionado con el espectro de potencias como:

$$\sigma^2 = \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle = \xi(0) = \frac{1}{V} \sum_k P(k). \quad (2.7)$$

La densidad de contraste  $\delta(\mathbf{x})$  sigue un *campo aleatorio Gaussiano*, pues cumple con la condición  $\delta_{-\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}}^*$ , las variables aleatorias independientes son las  $\delta_k$ , así la ecuación (2.4) se reescribe de la siguiente forma,

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}' (\delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \delta_{-\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad (2.8)$$

donde  $\sum'$  es la suma únicamente de la mitad del espacio  $\mathbf{k}$ . En un campo gaussiano, cada término  $[\delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \delta_{-\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$  es una variable aleatoria, real e independiente. Acorde con el teorema del límite central [20, pág. 783], la suma de un número grande de variables aleatorias e independientes tiene una distribución gaussiana, es decir, la probabilidad de que  $\delta(\mathbf{x})$  se encuentre en un pequeño intervalo  $(\delta, \delta + d\delta)$  es:

$$dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)} d\delta, \quad (2.9)$$

donde la varianza  $\sigma^2$  es independiente de la posición. Cualquier cantidad que es función lineal de valores tomados por la densidad de contraste en varias posiciones, también tendrá una distribución gaussiana. Por ejemplo, el gradiente del campo de la densidad de contraste es  $\nabla\delta = iV^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  y por el teorema del límite central se muestra que su distribución es gaussiana.

Si se generaliza la ecuación (2.9) para todo el conjunto de varios sitios localizados en la distribución de la densidad de contraste, haciendo una extensión de la ecuación (2.8), se puede encontrar la distribución de probabilidad para todo el conjunto  $\delta_1 \cdots \delta_D$  dado por:

$$dp = \frac{d\delta_1 \cdots d\delta_D}{(2\pi)^{D/2} |C|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^D \delta_i C_{ij}^{-1} \delta_j\right), \quad (2.10)$$

donde  $C^{-1}$  es la inversa de la matriz  $C$  definida de la forma siguiente,

$$C_{ij} = \langle \delta(\mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{x}_j) \rangle = \xi(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|). \quad (2.11)$$

La matriz  $C$  se llama *matriz de covarianza* y está determinada por la función de correlación  $\xi(x)$ , que a su vez está determinada por el espectro de potencias  $P(k)$  a través de la ecuación (2.6), es decir, todas las propiedades estadísticas de un campo

aleatorio gaussiano son determinados por su espectro de potencias [59].

Una de las predicciones más potentes del modelo  $\Lambda$ CDM es la detección de las Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO, por sus siglas en inglés, barionic acoustic oscillations) en la distribución de galaxias. Después de la inflación, la materia bariónica está totalmente ionizada y acoplada a la radiación, formando un plasma que es atraído a los potenciales gravitatorios creados por las sobredensidades de materia oscura. Al mismo tiempo, la presión de radiación tiende a dispersar los bariones. Este proceso de atracción y repulsión forma ondas acústicas en el plasma. En el Universo en expansión, estas ondas se propagan hasta el momento del desacople entre la materia bariónica y la radiación. En el momento del desacople, las ondas sonoras que se propagan en el plasma se congelan a una distancia dada por el horizonte acústico. Para coordenadas comóviles, este horizonte se expresa como [53],

$$r_s(z_{dc}) = \frac{c}{\sqrt{3}} \int_0^{1/(1+z_{dc})} \frac{da}{a^2 H(a) \sqrt{1 + (3\Omega_b/4\Omega_\gamma)a}} = 147 \text{ Mpc}, \quad (2.12)$$

donde  $z_{dc}$  es el corrimiento al rojo en el momento del desacople. Esta escala se puede utilizar como una regla estándar, ya que su tamaño aparente está únicamente afectado por la expansión del Universo. En el espacio de Fourier las BAO se observan como oscilaciones en el espectro de potencias, ver figura (2.2). En el espacio real las BAO se observan como una sobredensidad de la escala característica  $r_s$ , ver figura (2.1). Estas oscilaciones corresponden a las oscilaciones en los valores de la temperatura medidos por Planck, ver figura (1.11). Tras el desacople, la densidad media de cada tipo de materia-energía evoluciona según su ecuación de estado. Mientras, las fluctuaciones de materia existentes crecerán por inestabilidad gravitatoria, formando estructuras cada vez más compactas. En la figura (2.3) se muestra como evoluciona una sobredensidad que contiene materia oscura, gas (bariones), fotones y neutrinos, desde el Universo primigenio, hasta un corrimiento al rojo de  $z = 10$ .

A pequeñas escalas, cuando la densidad es suficientemente alta, las sobredensidades colapsarán para formar estructura (galaxias y cúmulos de galaxias) constituidas tanto por materia oscura como por materia bariónica. A grandes escalas, la evolución de las fluctuaciones está bien descrita por la teoría lineal de perturbaciones de la que se hablará más adelante. Las condiciones iniciales están definidas por el espectro primordial de inflación. Debido a la expansión, el tamaño aparente de  $r_s$  impreso en la distribución de materia, irá creciendo con el tiempo (en unidades comóviles esta escala se mantiene constante) y se podrá utilizar para medir la geometría del Universo [73].

Las BAO se manifiestan en la distribución espacial de galaxias como un exceso de materia a una escala comóvil  $r_s$ , lo que significa que desde cualquier galaxia, en cualquier dirección, hay una probabilidad mayor de encontrar otra galaxia a esa distancia, que a la distancia que habría si no se hubiese producido la onda acústica.

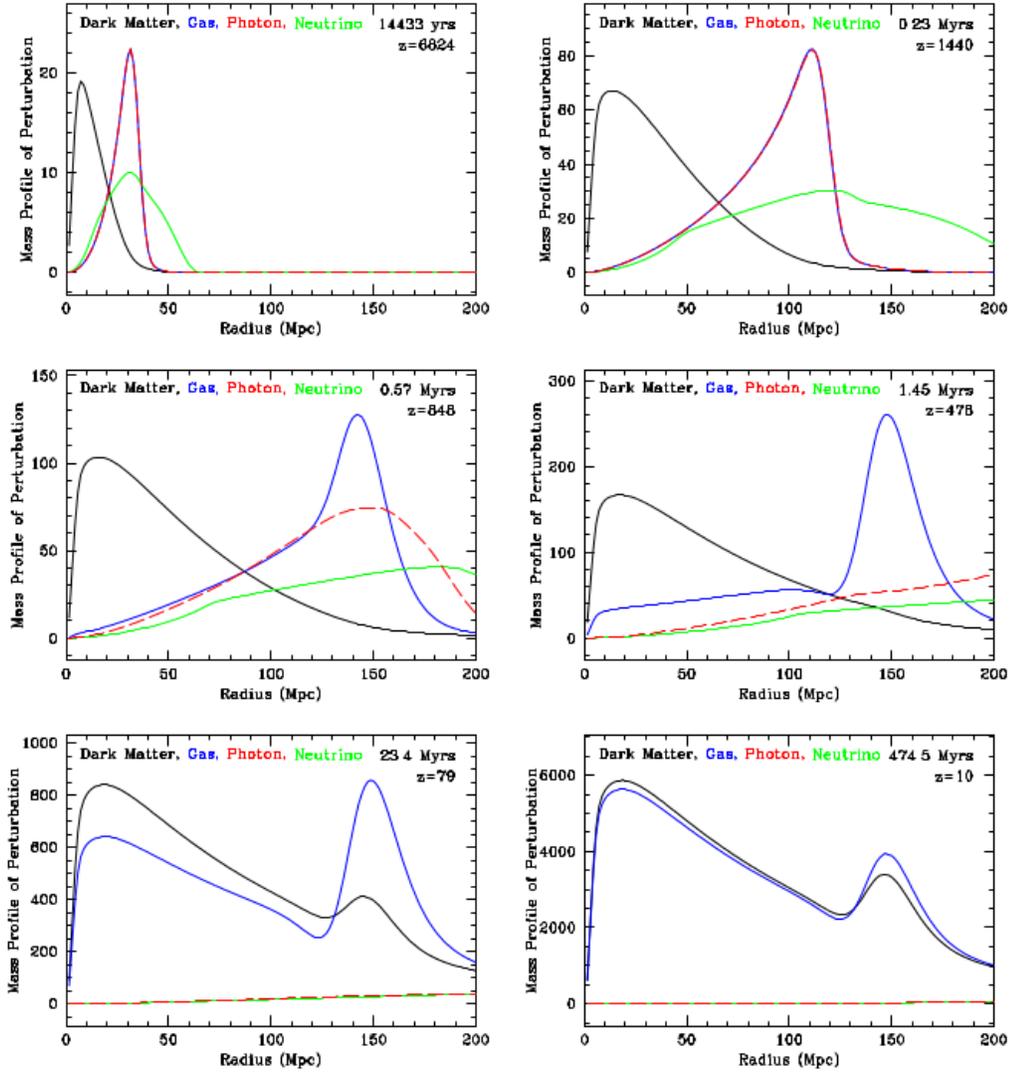


Figura 2.3: Se muestra la evolución de una sobredensidad en función del corrimiento al rojo para materia oscura [negro], bariones [azul], radiación [rojo] y neutrinos [verde]. Después del desacople, entre el segundo y el tercer panel, la materia bariónica empieza a caer hacia la materia oscura, que formaba los potenciales gravitatorios originales. Tomado de [37].

### 2.1.1. Teoría de Perturbaciones

El crecimiento de las perturbaciones, que dan origen a las galaxias, está dado por la evolución de  $\delta$  y se cuantifica por su espectro de potencias. Por ende, hace falta encontrar la ecuación diferencial que determine su crecimiento. Para un Universo perturbado, se necesita especificar la contribución de las perturbaciones del potencial gravitacional  $\phi(\mathbf{x})$ , la densidad de energía  $\rho(\mathbf{x})$ , la velocidad del fluido cósmico  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  y la presión de éste,  $P(\mathbf{x})$ .

Por lo tanto, para un instante dado,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0(x) + \Phi(\mathbf{x}), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = H\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (2.14)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}) = \rho_0[1 + \delta(\mathbf{x})], \quad (2.15)$$

$$P(\mathbf{x}) = P_0 + \delta P(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

con  $\phi_0(x) = -GM/ax = (4\pi G/3)(ax)^2\rho_0$ , debido a las perturbaciones  $\Phi(\mathbf{x})$  es el potencial gravitacional peculiar,  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  es la llamada velocidad peculiar. Las perturbaciones  $\delta\rho$ ,  $\delta P$  y  $\mathbf{v}$  serán tratadas a primer orden. Al tomar la ecuación de Poisson y las ecuaciones hidrodinámicas para la descripción del fluido, es decir,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\mathbf{x}) \quad \text{Poisson,} \quad (2.17)$$

$$\frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{u})\rho(\mathbf{x}) \quad \text{Continuidad,} \quad (2.18)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi \quad \text{Euler,} \quad (2.19)$$

donde  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ , y al sustituir las ecuaciones (2.13), (2.14), (2.15) y (2.16) dentro de las ecuaciones hidrodinámicas; en el espacio de Fourier, las perturbaciones a primer orden de estas ecuaciones toman la forma<sup>2</sup>:

$$-\frac{k^2}{a^2}\Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi G\rho\delta_{\mathbf{k}} \quad \text{Poisson,} \quad (2.20)$$

$$a\dot{\delta}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \quad \text{Continuidad,} \quad (2.21)$$

$$a\dot{\mathbf{v}} + aH\mathbf{v}_{\mathbf{k}} + i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\frac{\delta P_{\mathbf{k}}}{\rho} \quad \text{Euler.} \quad (2.22)$$

Ahora bien, la velocidad peculiar se puede reescribir como la suma vectorial de una parte que es paralela al vector  $\mathbf{k}$  y otra que es perpendicular a éste, de la siguiente manera,

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{\parallel} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{\perp}. \quad (2.23)$$

La parte escalar puede escribirse como  $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{\parallel} = -i\hat{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}}$ , donde  $|V_{\mathbf{k}}|$  es la magnitud de  $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{\parallel}$ , además,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^{\perp} = 0$ . Al insertar la ecuación (2.23) en la ecuación (2.21) y (2.22) se obtiene para la parte perpendicular,

$$a\dot{\mathbf{v}}^{\perp} + aH\mathbf{v}^{\perp} = 0, \quad (2.24)$$

la solución de la ecuación (2.24) decae como  $1/a$ , que corresponde a la conservación del momento angular del elemento de fluido. Para la parte paralela se obtienen las

---


$${}^2\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial(ax_1)}, \frac{\partial}{\partial(ax_2)}, \frac{\partial}{\partial(ax_3)} \right).$$

siguientes ecuaciones,

$$-\frac{k^2}{a^2}\Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi G\rho\delta_{\mathbf{k}} = \frac{3}{2}H^2\Omega_m(t)\delta_{\mathbf{k}} \quad \text{Poisson.} \quad (2.25)$$

$$\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{k}{a}\mathbf{V}_{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{Continuidad,} \quad (2.26)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} + H\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \frac{k}{a}\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{k}{a}\frac{\delta P_{\mathbf{k}}}{\rho} \quad \text{Euler,} \quad (2.27)$$

De éstas últimas ecuaciones la evolución de  $\delta$  queda determinada por la ecuación diferencial,

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - \frac{3}{2}H^2\Omega_m(t)\delta_{\mathbf{k}} = -\frac{k^2}{a^2}\frac{\delta P_{\mathbf{k}}}{\rho}, \quad (2.28)$$

si se busca la evolución de  $\delta$  para la materia bariónica, se tendrá,

$$\ddot{\delta}_b + 2H\dot{\delta}_b + \left(\frac{k^2}{a^2}c_s^2 - \frac{3}{2}H^2\right)\delta_b = 0, \quad (2.29)$$

donde  $c_s^2 \equiv \delta P_b/\delta\rho_b = 4\pi G\rho_b \cdot (a/k_J)^2$ , es la velocidad del sonido dentro del fluido cósmico y  $k_J$  es el número de onda de Jeans [29]. Durante la época de dominación de la materia (polvo), ver ecuaciones (1.29) y (1.30), la solución general a la ecuación (2.28) cuando se considera que  $\delta P(\mathbf{k}) = 0$ , es de la forma,  $\delta(x, t) = A(x)D_+(t) + B(x)D_-(t)$ , que tiene una parte creciente que va como  $D_+(t) \propto t^{2/3}$  y una solución de decaimiento dada por  $D_-(t) \propto t^{-1}$ , después de algún tiempo la parte creciente domina y se forma la estructura de galaxias y cúmulos de galaxias [20, 29].

## 2.2. Distorsiones de Corrimiento al Rojo

Como se vio en la sección anterior, BAO es una buena regla estándar, puesto que, desde el desacople, la escala acústica sólo ha cambiado debido a la expansión del Universo, entonces, se puede determinar el parámetro de Hubble. Para las BAO, se puede medir la escala acústica tanto en la dirección transversal (espacio angular) como en la dirección radial (espacio de  $z$ ), que es la dirección de la línea de visión, ver figura (2.4). En la dirección transversal, el ángulo subtendido por una regla estándar, está relacionado con su tamaño transverso por la ecuación  $\Delta\theta = s_{\perp}/d_A$  (para ángulos pequeños  $\sin\theta \approx \theta$ ), donde  $s_{\perp}$  es el tamaño transversal de la fuente y  $d_A$  es la distancia diametral angular. Si se conoce el tamaño intrínseco de la fuente, se dice que es una regla estándar, como ocurre con las BAO. Para tal caso, la distancia diametral angular de las BAO, que está relacionada con los parámetros cosmológicos a través de la integral del parámetro de Hubble, en un universo plano, se calcula como:

$$d_A = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.30)$$

Para medir la escala de BAO en la dirección radial, se miden intervalos de corrimiento al rojo entre pares de galaxias en la línea de visión y se obtiene la función

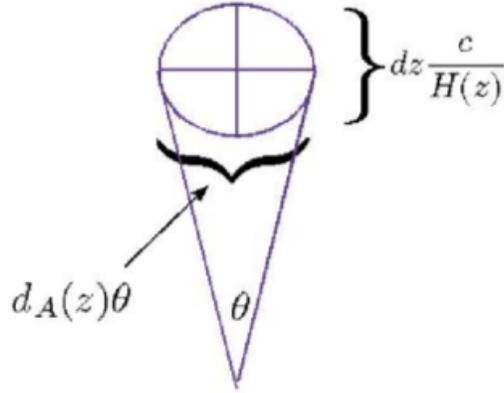


Figura 2.4: Se muestra el método de la regla estándar y cómo su tamaño está relacionado con los parámetros cosmológicos. El tamaño transversal de la fuente es  $s_{\perp} = d_A(z) \cdot \theta$ , donde la distancia diametral angular es la hipotenusa (que crece conforme al parámetro de escala  $a(t)$ ) del triángulo que se forma entre la distancia del punto de observación al centro de la fuente y  $s_{\perp}/2$ , es válido sólo para ángulos pequeños. Tomado de [73].

de correlación en la dirección radial. El intervalo  $\Delta z$  asociado con la distancia del objeto en la dirección radial  $s_{\parallel}$ , en la función de correlación en  $z$ , está relacionado con el parámetro de Hubble directamente por la ecuación  $H(z) = c\Delta z/s_{\parallel}(z)$ . El tamaño de las BAO en la dirección transversal y en la dirección radial son iguales dada la isotropía del Universo, pero debido a que el corrimiento al rojo es una medida de la velocidad, donde se incluyen las velocidades peculiares de las galaxias, se produce una distorsión de la escala BAO en la línea de visión. A este efecto se le llama **distorsiones en el espacio de corrimiento al rojo** (RSD, por sus siglas en inglés, redshift space distortions). Los efectos de las RSD también afectan a la distancia transversal, pero sólo se observa el efecto en la dirección radial que es la línea de visión.

Partiendo de la ley de Hubble, la velocidad de recesión,  $v = cz$ , de las galaxias es proporcional a su distancia real ( $c$  es la velocidad de la luz), ver ecuación (1.19). La velocidad de recesión de las galaxias se mide a partir de su corrimiento al rojo de su espectro ( $z$ ), de manera mucho más fácil y precisa que su distancia real. La ley de Hubble no es perfecta, pues no incluye las velocidades peculiares de las galaxias. Por lo tanto, es necesario, en general, distinguir entre la *distancia de corrimiento al rojo* de una galaxia (convenientemente expresada en unidades de velocidad)

$$s \equiv cz, \quad (2.31)$$

y su distancia real  $r$  (también expresada en unidades de velocidad)<sup>3</sup>

$$r \equiv H_0 d. \quad (2.32)$$

<sup>3</sup>En la ecuación (1.19) se tiene a  $r$  como la distancia real y a  $v$  como la velocidad de la galaxia. Para este caso la distancia será  $d$  y la velocidad  $r$ .

La distancia de corrimiento al rojo  $s$  de una galaxia difiere de la distancia real  $r$  por su velocidad peculiar  $v \equiv \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}$  a lo largo de la línea de visión :

$$s = r + v. \quad (2.33)$$

La velocidad  $s$  es la velocidad verdadera que tienen las galaxias, pues incluye la expansión del Universo y la velocidad peculiar de éstas. La velocidad peculiar de las galaxias causa su aparente desplazamiento a lo largo de la línea de visión en el espacio de corrimiento al rojo. Estos desplazamientos conducen a distorsiones de corrimiento al rojo en las fluctuaciones de densidad, debido a los movimientos de las galaxias dentro de los cúmulos en el espacio de corrimiento al rojo. Las estructuras que se ven en la distribución a gran escala serán más densas y los vacíos mayores, con un efecto de compresión en la función de correlación en la línea de visión, conocido como efecto Kaiser [52]. A pequeñas escalas, las velocidades aleatorias dentro de los cúmulos de galaxias producen una elongación radial de la distribución de galaxias, apuntando al observador. Este efecto recibe el nombre de *Dedos de Dios* (FOG, por sus siglas en inglés, Finger-Of-God)<sup>4</sup>. La distorsión complica la interpretación de los mapas del corrimiento al rojo, pero tienen la ventaja de llevar información de la dinámica de las galaxias. En particular, la amplitud de las distorsiones a grandes escalas produce una medida del *parámetro lineal de distorsión de corrimiento al rojo*  $\beta$ , que está relacionada con la densidad  $\Omega_0$  por  $\beta = f(\Omega_0)/b \approx \Omega_0^{0.55}/b$ , donde  $b$  será especificado más adelante.

La figura (2.5), ilustra como una sobredensidad esférica aparece distorsionada por la velocidad peculiar a lo largo de la línea de visión cuando es observado en el espacio de corrimiento al rojo.

La perturbación inicial de la sobredensidad esférica, aquí, se toma como una ley de potencias con radio,  $\delta \propto r^{-1}$ , ubicado en un Universo en expansión con densidad media crítica,  $\Omega = 1$ . El colapso gravitacional en caída libre de la sobredensidad esférica sin presión, puede ser calculada analíticamente. Entonces, la densidad de puntos en la figura (2.5) indica la densidad de galaxias colapsando en la sobredensidad, como se observa en el espacio de corrimiento al rojo.

En la figura (2.6), se muestra como las velocidades peculiares producen el patrón ilustrado en la figura (2.5). A gran escala, la propia caída hacia la sobredensidad hace que aparezca aplastada a lo largo de la línea de visión. El aplastamiento incrementa a escalas más pequeñas, hacia abajo, hasta el punto de cambio de tendencia, donde la velocidad peculiar cancela exactamente la expansión de Hubble. De igual manera, las capas que han dado la vuelta y están colapsando en el espacio real aparecen al revés en el espacio de corrimiento al rojo, ver figura 2.5.

Una vez conocido esto, se puede hacer una teoría lineal de las distorsiones de corrimiento al rojo. Dicha teoría fue aclarada en gran medida por un artículo funda-

---

<sup>4</sup>El término fue acuñado en el simposio de la UAI (International Astronomical Union) en Tallin por Tully y Fisher (1978), ver [82]; el efecto en sí se observó primero por Jackson (1972), ver [51].

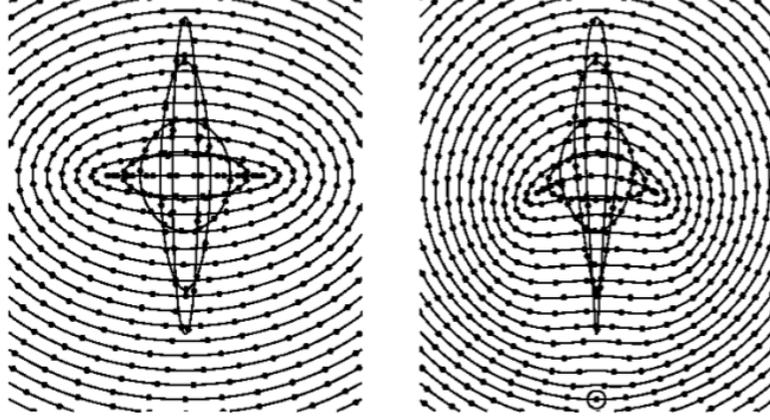


Figura 2.5: Una sobredensidad esférica aparece distorsionada por las velocidades peculiares cuando es observado en el espacio del corrimiento al rojo. A gran escala (lineal) la sobredensidad aparece aplastada a lo largo de la línea de visión, mientras que, a escalas pequeñas (no lineal) aparecen los Dedos de Dios. A la izquierda, la sobredensidad está lejos del observador (que está mirando hacia arriba desde algún punto por debajo del fondo de la figura), y las distorsiones parecen ser planos paralelos. A la derecha, la sobredensidad está cerca del observador (punto grande), y las distorsiones a gran escala aparecen en forma de riñón, mientras que los Dedos de Dios, se afilan en los extremos que apuntan al observador. Tomado de [45].

mental hecho por Kaiser en 1987 [52]. En el artículo se muestra como el parámetro  $\beta$ , que es una cantidad realmente medible a partir de las distorsiones de corrimiento al rojo, tiene significado el cual se verá más adelante. De igual manera se muestra como, a partir de las distorsiones de corrimiento al rojo, se puede medir el parámetro de densidad  $\Omega_0$ .

Físicamente, para hacer crecer una región sobredensa, las galaxias tienen que moverse, en general, en la dirección del colapso de la sobredensidad. Más precisamente, el valor de  $\beta$  que es medible en el régimen lineal, es el valor que resuelve la ecuación de continuidad linealizada [45], ver ecuación (2.26),

$$\beta\delta + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.34)$$

Según lo predicho por la teoría gravitacional del crecimiento de estructura, el campo de velocidades peculiares es irrotacional (no tiene vorticidad).

Es conveniente trabajar en un sistema de coordenadas comóvil, el cual crece con la expansión de Hubble, en el Universo. Así que, la velocidad peculiar  $\mathbf{v}$  apropiada de una galaxia, es su velocidad en el marco comóvil, dada por:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{a d\mathbf{r}}{H_0 a_0 dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \quad (2.35)$$

donde  $t$  es el tiempo propio,  $\tau$  es el tiempo conforme sin dimensiones definido por

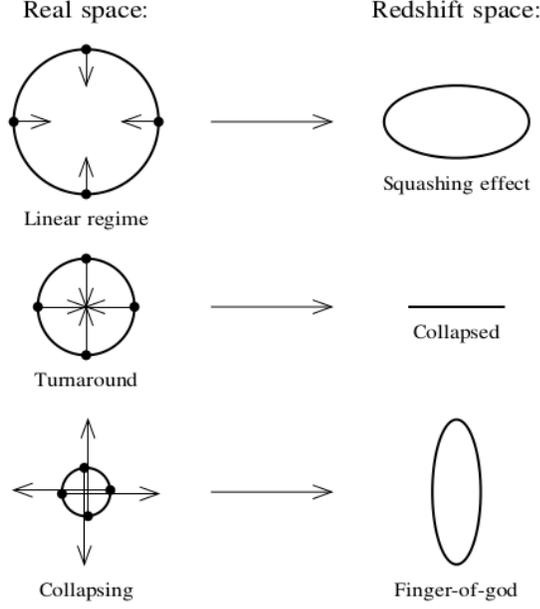


Figura 2.6: Los puntos son galaxias experimentando una caída hacia una sobredensidad esférica, las flechas representan las velocidades peculiares. A gran escala, las velocidades peculiares de una capa cayendo es menor comparado con su radio y la capa aparece aplastada. A escalas más pequeñas (cerca del centro), no sólo es el radio de una capa más pequeña, sino que también su velocidad peculiar es más grande pero ya no es debido al colapso gravitacional sino al movimiento alrededor de su centro. Tomado de [45].

$$d\tau \equiv H_0 a_0 dt / a^5.$$

Las ecuaciones de continuidad, Euler y Poisson, para materia oscura fría (sin presión) en un Universo de FLRW perturbado son [75]:

$$\frac{\partial \delta_{mo}}{\partial \tau} + \nabla \cdot (1 + \delta_{mo}) \mathbf{v}_{mo} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial a \mathbf{v}_{mo}}{a d\tau} + \mathbf{v}_{mo} \cdot \nabla \mathbf{v}_{mo} = -\nabla \phi, \quad (2.37)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{4\pi G \rho_{mo} a^2 \delta_{mo}}{H_0^2 a_0^2} = \frac{3\Omega_{mo} H^2 a^2 \delta_{mo}}{2H_0^2 a_0^2}, \quad (2.38)$$

donde  $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}$  es el gradiente comóvil y  $\rho_{mo} \propto a^{-3}$  es la densidad de materia oscura. En el régimen lineal, donde  $|\delta_{mo}| \ll 1$ , las ecuaciones de continuidad y de

<sup>5</sup>Una de las ventajas de trabajar con el tiempo conforme es que los objetos (por ejemplo los fotones) que se mueven a la velocidad de la luz  $c$  tienen velocidades peculiares  $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = c$  en todo momento [45].

Euler se reducen a,

$$\frac{\partial \delta_{mo}}{d\tau} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{mo} = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial a \mathbf{v}_{mo}}{ad\tau} = -\nabla \phi. \quad (2.40)$$

Si se descompone a la velocidad peculiar (como siempre se puede hacer) en su parte escalar y transversal (vectorial),

$$\mathbf{v}_{mo} = \mathbf{v}_{mo}^{\parallel} + \mathbf{v}_{mo}^{\perp}, \quad (2.41)$$

en el que la parte longitudinal,  $\mathbf{v}_{mo}^{\parallel} = \nabla \psi$ , es el gradiente de algún potencial escalar  $\psi$ , mientras que la parte transversal,  $\mathbf{v}_{mo}^{\perp} = \nabla \times \mathbf{A}$ , es el rotacional de algún potencial vectorial  $\mathbf{A}$ , entonces, la ecuación linealizada de Euler (2.40) vendrá dada por,

$$\frac{\partial a \mathbf{v}_{mo}^{\parallel}}{ad\tau} = -\nabla \phi, \quad \frac{\partial a \mathbf{v}_{mo}^{\perp}}{ad\tau} = 0. \quad (2.42)$$

La segunda ecuación en (2.42), muestra que la parte transversal de la velocidad peculiar decae como  $\mathbf{v}_{mo}^{\perp} \propto a^{-1}$ , conforme el Universo se expande. Si la gravedad es la única que actúa, entonces la velocidad peculiar en el régimen lineal debe ser puramente longitudinal.

Cuando las ecuaciones linealizadas de continuidad (2.39), Euler (2.40) y Poisson (2.38) son combinadas, el resultado es una ecuación diferencial de segundo orden para la densidad relativa, de la siguiente forma,

$$\ddot{\delta}_{mo} + \mathcal{H} \dot{\delta}_{mo} - \frac{3\Omega_{mo} \mathcal{H}^2 a^2}{2\mathcal{H}_0^2 a_0^2} \delta_{mo} = 0, \quad (2.43)$$

donde el punto indica la derivada con respecto al tiempo conforme y no con respecto al tiempo cósmico, como en la ecuación (2.29),  $\mathcal{H} = Ha = \frac{da/d\tau}{a}$ , es el factor de Hubble con respecto al tiempo conforme. La ecuación (2.43), cuando es combinada con la solución sin perturbar del factor de escala cósmico  $a(\tau)$ , conduce a las soluciones crecientes y decrecientes,

$$\delta_{mo}(\mathbf{r}, \tau) \propto D(\tau), \quad (2.44)$$

que evolucionan en el tiempo sin cambio de forma. La solución interesante es la solución inestable de crecimiento.  $D_+(\tau)$  será tomada como el factor de crecimiento lineal. Entonces, la ecuación de continuidad linealizada (2.34) puede ser escrita como,

$$\frac{Haf}{H_0 a_0} \delta_{mo} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{mo} = 0, \quad (2.45)$$

donde  $f$  es la *función de crecimiento lineal adimensional* definida como sigue,

$$f \equiv \frac{H_0 a_0}{Ha} \frac{d \ln D}{d\tau} = \frac{d \ln D}{d \ln a}. \quad (2.46)$$

En la Cosmología estándar dominada por la materia oscura, sin presión, la función de crecimiento adimensional  $f$  es una función de  $\Omega_{mo}$  con una aproximación de ley de potencias. El exponente de la ley de potencias está, entonces, directamente relacionado con la formación de estructura [57]

$$f(\Omega_{mo}) \approx \Omega_{mo}^{0.55}. \quad (2.47)$$

Lahav en 1991, da una aproximación en el caso donde hay una constante cosmológica  $\Lambda$ , así que la densidad cosmológica total es una suma de la materia y la constante cosmológica,  $\Omega = \Omega_{mo} + \Omega_{\Lambda}$ :

$$f(\Omega_{mo}, \Omega_{\Lambda}) \approx \Omega_{mo}^{0.55} + \frac{\Omega_{\Lambda}}{70} \left( 1 + \frac{\Omega_{mo}}{2} \right). \quad (2.48)$$

La ecuación (2.45), es la ecuación de continuidad para la materia oscura. Entonces, para ir de la ecuación (2.45) a la ecuación de continuidad (2.34), para las galaxias, implica un *sesgo* (bias, en inglés).

El modelo más simple de bias postula que la sobredensidad de galaxias  $\delta_g$  está linealmente sesgada por un factor constante, el **factor lineal bias**  $b$ , con respecto a la sobredensidad de materia oscura  $\delta_{mo}$ , de modo que,

$$\delta_g = b\delta_{mo}, \quad (2.49)$$

donde  $b = b(k, z)$ . Mientras que las velocidades de las galaxias, se asume, siguen fielmente la velocidad de la materia oscura,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{mo}. \quad (2.50)$$

El modelo de bias (2.49) predice que, al menos en algunos regímenes, la función de correlación para las galaxias  $\xi_g(r_{12}) \equiv \langle \delta(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_2) \rangle$  deben ser amplificadas por la función de correlación de la materia  $\xi_{mo}(r_{12}) \equiv \langle \delta_{mo}(\mathbf{r}_1)\delta_{mo}(\mathbf{r}_2) \rangle$  por aproximadamente un factor constante,

$$\xi_g(r_{12}) \approx b^2 \xi_{mo}(r_{12}). \quad (2.51)$$

La ecuación de continuidad linealizada para la materia (2.45), evaluada hoy en día junto con la ecuación (2.49), dió lugar a la ecuación de continuidad linealizada para las galaxias (2.34), donde la cantidad adimensional  $\beta$  está relacionada con la función de crecimiento lineal  $f$ , dado por:

$$\beta = \frac{f}{b}. \quad (2.52)$$

Si la velocidad peculiar de la materia está libre de rotaciones en el régimen lineal, implica que la velocidad de las galaxias también lo es. La ecuación (2.34) implica que la velocidad peculiar de las galaxias  $\mathbf{v}$  esta relacionada actualmente con la sobredensidad de galaxias  $\delta_g$ , de modo que,

$$\mathbf{v} = -\beta \nabla \nabla^{-2} \delta_g, \quad (2.53)$$

donde  $\nabla^{-2}$  es el Laplaciano inverso. Todas las mediciones de  $\beta$  en el régimen lineal son, en efecto, mediciones de la proporción entre velocidad peculiar  $\mathbf{v}$  a la sobredensidad de galaxias  $\delta_g$ .

En el régimen lineal, la sobredensidad  $\delta_g^s$  en el espacio de corrimiento al rojo ( $\mathbf{s}$ ) está relacionado con la sobredensidad  $\delta_g$  en el espacio real por el **operador lineal de distorsión de corrimiento al rojo  $\mathbf{S}$** <sup>6</sup>,

$$\delta_g^s = \mathbf{S}\delta_g. \quad (2.54)$$

En el espacio real, el operador de distorsión, es un operador integro-diferencial (el laplaciano inverso  $\nabla^{-2}$  es la parte integral), dado por:

$$\mathbf{S} = 1 + \beta \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\alpha(\mathbf{r})\partial}{r\partial r} \right) \nabla^{-2}. \quad (2.55)$$

donde  $\alpha(\mathbf{r})$  es la derivada logarítmica de  $r^2$  veces la función de selección del espacio real  $\bar{n}(\mathbf{r})$ ,

$$\alpha(\mathbf{r}) \equiv \frac{\partial \ln r^2 \bar{n}(\mathbf{r})}{\partial \ln r}. \quad (2.56)$$

El operador de distorsión de corrimiento al rojo (2.55) es válido en el marco de referencia de un observador estacionario, los que están en reposo con respecto a la radiación cósmica de fondo, siempre que la sobredensidad de corrimiento al rojo  $\delta_g^s(\mathbf{r})$  este definida con respecto a la función de selección del espacio real  $\bar{n}(\mathbf{r})$  y del espacio de corrimiento al rojo  $n^s(\mathbf{r})$ ,

$$\delta_g^s(\mathbf{s}) \equiv \frac{n^s(\mathbf{s}) - \bar{n}(\mathbf{s})}{\bar{n}(\mathbf{s})}, \quad (2.57)$$

donde  $\delta_g^s(\mathbf{s})$  es la sobredensidad de galaxias observado en el espacio de corrimiento al rojo.

El operador de distorsión  $\mathbf{S}$  (2.54) funciona bien para analizar un grupo de galaxias a distancia un tanto grandes, pero a gran escala el operador llega a un límite donde ya no puede describir de forma adecuada a las galaxias, puesto que, la línea de visión es muy grande y las galaxias aparecen como si estuvieran en un plano. Así que se define el **operador lineal plano-paralelo de distorsión de corrimiento al rojo  $\mathbf{S}^p$**  (el superíndice  $p$  indica el plano-paralelo), por lo tanto, el operador  $\mathbf{S}$  (2.54) a gran escala se reduce a,

$$\mathbf{S}^p = 1 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^{-2}, \quad (2.58)$$

donde  $z$  es la distancia a lo largo de la línea de visión. En el espacio de Fourier,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^{-2} = \frac{k_z^2}{k^2} = \mu_k^2, \quad (2.59)$$

---

<sup>6</sup>Conceptualmente, es útil reconocer que el operador  $\mathbf{S}$  es un operador lineal (una matriz en el espacio de Hilbert), así como muchos de los operadores que uno encuentra en la mecánica cuántica.

con  $\mu_{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$  el coseno del ángulo del vector de onda  $\mathbf{k}$  y la línea de visión  $\mathbf{z}$ . Por lo tanto, en el espacio de Fourier el operador plano-paralelo de distorsión se reduce a:

$$\mathbf{S}^p = 1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2, \quad (2.60)$$

de modo que, como se ilustra en la figura (2.7), un modo de Fourier  $\hat{\delta}_g^s(\mathbf{k})$  en el espacio de corrimiento al rojo es simplemente igual a el modo de Fourier en el espacio real  $\hat{\delta}_g(\mathbf{k})$  amplificado por un factor  $(1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)$ , es decir,

$$\hat{\delta}_g^s(\mathbf{k}) = (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)\hat{\delta}_g(\mathbf{k}). \quad (2.61)$$

A partir de la ecuación (2.61) se calcula, en el espacio de corrimiento al rojo, el

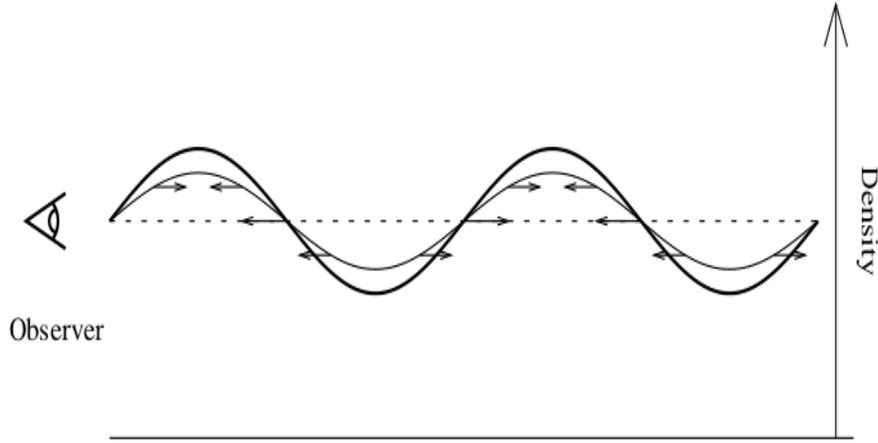


Figura 2.7: Una onda de amplitud  $\delta(\mathbf{k})$  en el espacio real (línea delgada) aparece como una onda con amplitud mayor  $\delta^s(\mathbf{k})$  en el espacio de corrimiento al rojo (línea gruesa) debido a las velocidades peculiares (flechas). Tomado de [45].

espectro de potencias de galaxias  $P_g^s(\mathbf{k})$ , el cual es amplificado por  $(1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2$  sobre su contra parte en el espacio de Fourier<sup>7</sup>  $P_g(\mathbf{k})$ ,

$$P_g^s(\mathbf{k}) = (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 P_g(\mathbf{k}). \quad (2.62)$$

La ecuación (2.62), es la ecuación propuesta por Kaiser [52, ec.(3.5)] para el espectro de potencias de galaxias. El término que aparece al cuadrado es el término de las distorsiones al corrimiento al rojo del espectro de potencias. Si se obvia un momento  $\mu_{\mathbf{k}}$ , el cual desaparecerá al hacer promedios angulares, se ve que el factor  $\beta$  es el importante para calcular las RSD.

<sup>7</sup>Tómese en cuenta que, se esta hablando de 3 espacios. Uno corresponde al espacio real, el otro se refiere al espacio de Fourier que no es otra cosa que la transformada del espacio real y por último se tiene el espacio del corrimiento al rojo  $s$  visto en el espacio de Fourier. Podría decirse que en realidad sólo se tienen dos espacios, el espacio real y el espacio de corrimiento al rojo, ambos vistos en el espacio de Fourier.

Al ver la ecuación (2.51) se deduce la relación entre el espectro de potencias de galaxias y el espectro de potencias de materia oscura como,

$$P_g(\mathbf{k}) = b^2(k, z)P_{mo}(\mathbf{k}), \quad (2.63)$$

al sustituir (2.63) en (2.62) se obtiene:

$$P_g^s(\mathbf{k}) = (b + f\mu_k^2)^2 P_{mo}(\mathbf{k}). \quad (2.64)$$

La relación anterior es importante, pues que en la práctica, lo que se mide es el espectro de potencias de galaxias en el espacio de corrimiento al rojo  $P_g^s(\mathbf{k})$ .

Además, los espectros de potencias dependen ya no sólo de la magnitud del vector de onda  $\mathbf{k}$  sino también de su dirección a diferencia de lo que se dijo al comienzo del capítulo. Ésto es debido a que ahora se esta tomando en cuenta las velocidades peculiares de las galaxias. Antes sólo nos interesaba la probabilidad de encontrar una única galaxia en cierta región del espacio. Pero ahora, nos interesa saber la probabilidad de encontrar una segunda galaxia a cierta distancia  $\mathbf{x}$  y con número de onda  $\mathbf{k}$ , una vez que se está observando una primera, ver figura (2.8).

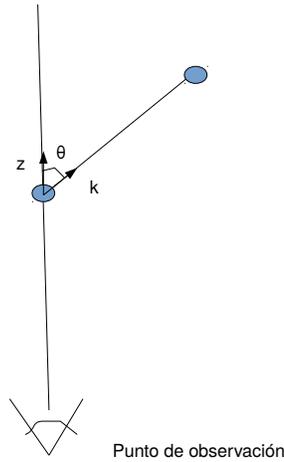


Figura 2.8: Los puntos azules representan dos galaxias separadas por una distancia  $\lambda$ , donde se toma que  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  es un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{k}$ , el vector  $\mathbf{z}$  representa la línea de visión y  $\theta$  es el ángulo que separa ha estos dos vectores.

# Capítulo 3

## Modelos de Gravedad Modificada

La teoría de la Relatividad General de Einstein ha sido probada satisfactoriamente durante muchos años de pruebas experimentales [86]. Estas pruebas van desde estudios en el sistema solar hasta la comprobación de las ondas gravitacionales [12]. Pues bien, la RG se ha probado dentro del Universo local, lo cual abre la posibilidad de que ésta no sea una buena descripción a gran escala en el Universo. El modelo estándar de Cosmología asume RG como la teoría correcta de gravedad en todas las escalas. En 1998, los astrónomos hicieron el sorprendente descubrimiento de que la expansión del Universo es de forma acelerada [70, 72]. Tal descubrimiento hizo que Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt, y Adam G. Riess fueran acreedores el Premio Nobel de Física, en 2011. Dentro del marco de referencia de la RG, la aceleración se originaría a partir de una energía oscura desconocida<sup>1</sup>, cuya presión es negativa. El modelo más simple de energía oscura es el de la constante cosmológica, introducida inicialmente por Einstein. El problema de esta constante es que su valor debe ser increíblemente pequeño. La física de partículas predice la existencia de energía del vacío que proporciona un valor para la constante cosmológica, pero esto es, por lo general, de 120 órdenes de magnitud mayor que los valores observados que asume RG [54]. El mecanismo de la energía oscura aún no está bien entendido, y es por eso que se deben buscar nuevas alternativas, como por ejemplo gravedad modificada. Existen otros modelos de energía oscura como el modelo CPL, quintaesencia, K-esencia, en los que la densidad de energía oscura cambia con el tiempo, existen más, pero no serán tema de estudio en el presente trabajo. La constante cosmológica no sería necesaria si la acción (1.18) de RG fuera incorrecta, a escalas cosmológicas. Este descubrimiento, de la aceleración tardía del Universo, puede requerir la revisión de la teoría de gravitación a escalas cosmológicas y el modelo estándar de la Cosmología basada en RG. En este capítulo se revisarán los avances en la construcción de los modelos de gravedad modificada (GM) como una alternativa a la energía oscura.

---

<sup>1</sup>El lector debe recordar que la energía oscura es el nombre de la sustancia o el fenómeno responsable de la aceleración del Universo, pero no indica de ninguna manera que su mecanismo esté entendido.

### 3.1. Gravedad Modificada

Aún cuando el modelo  $\Lambda$ CDM es el aceptado en Cosmología, presenta algunos problemas. Uno de estos es; el *problema de la constante cosmológica*, pues como ya se dijo, tiene un valor muy pequeño. Teóricamente se espera que  $\Lambda_{teo} = m_{pl}^2$ , donde  $m_{pl} = 2.177 \times 10^{-5} g = 10^{19} GeV$  es la masa de Planck, pero las observaciones dan un valor de  $\Lambda_{teo} = 10^{-120} m_{pl}^2$ , es decir, es ¡120 órdenes de magnitud más pequeña que la dictada por la teoría! Otro de los problemas, tiene que ver con el hecho de que los órdenes de magnitud de las densidades de energía oscura y materia son comparables hoy en día, es decir, del mismo orden de magnitud, y no existe explicación clara de esto, salvo que ocurra por coincidencia. A este problema se le conoce como el *problema de la coincidencia*. Un problema más, tiene que ver con la geometría del Universo, y es debido a que  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ , implica que  $\Omega_k \approx 0$ , es decir, se tiene una geometría plana. No hay una explicación certera del porque el Universo tiene geometría plana. A esto se le conoce como el *problema de la planitud*.

Probablemente, la razón principal por la cual se deben emplear modelos de GM es por el problema de la constante cosmológica, dichos modelos de GM deben explicar la aceleración tardía del Universo y pasar todas las pruebas que ha pasado RG para que puedan tomarse como el nuevo modelo estándar de Cosmología.

Modificar la gravedad no es cosa fácil, pues inmediatamente se presentan problemas, como el de tener derivadas de orden mayor a dos. Hay un teorema muy fuerte conocido como *teorema de Lovelock* [61]. El teorema prueba que las ecuaciones de movimiento de Einstein son las únicas de segundo orden con respecto a la métrica, que se obtienen a partir de la acción

$$S = \int \left( \frac{1}{16\pi G} R + L_m \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.1)$$

Por lo tanto, si se proponen teorías nuevas de gravitación, se necesita que la nueva teoría cumpla una o más de las siguientes propiedades dado el teorema de Lovelock:

- Grados de libertad extra.
- Derivadas de orden mayor.
- Un espacio-tiempo con más dimensiones.
- No-localidad.

Un vez introducidos estos ingredientes adicionales dentro de la teoría, más allá de RG, se necesita revisar la consistencia teórica del modelo primeramente. Es necesario ver que las soluciones sean estables.

Si una de las teorías de GM es aceptada teóricamente, entonces, necesita pasar las pruebas observacionales. Lo primero es satisfacer las estrictas restricciones del

Sistema Solar. Por ejemplo, el ángulo  $\theta$  de desviación de las estrellas debido al Sol se observa que es [77]

$$\theta = (0.99992 \pm 0.00023) \times 1.75'', \quad (3.2)$$

donde  $1.75''$  es el valor predicho por RG. Otra predicción de RG es la dilatación del tiempo debido a los efectos del campo gravitacional del Sol  $\Delta t_{RG}$ . Esto fue medido de manera muy precisa usando el satélite Cassini obteniendo un valor [18],

$$\Delta t = (1.00001 \pm 0.00001) \Delta t_{RG}. \quad (3.3)$$

Cualquier teoría de GM necesita satisfacer estas restricciones sobre las desviaciones de RG en el Sistema Solar. Como ya se menciona, la RG es una teoría altamente exitosa, que ha resistido a las pruebas observacionales durante casi un siglo. Sin embargo, al igual que la teoría de Newton (que se mantuvo durante más de 200 años), todavía puede demostrar ser de validez limitada, y ser sustituida por una teoría más fundamental.

Existen diferentes modelos de GM que han sido estudiados recientemente, ver referencia [54]. A continuación se hará una revisión de algunos de estos modelos<sup>2</sup>. Pero antes de comenzar, se planteará la idea de cómo emplear GM para este trabajo.

Lo que se pretende es estudiar la formación de estructura en el Universo, y para esto se necesita la teoría de perturbaciones, ya mencionada en el capítulo 2. Pero también, se necesitan las perturbaciones en la métrica, para obtener así, las ecuaciones de Einstein perturbadas. Únicamente se tomarán las perturbaciones a primer orden, las cuales se consideran perturbaciones lineales. Las perturbaciones de orden mayor en la métrica, se consideran perturbaciones no-lineales, pero no se estudiarán en este trabajo. La idea es tomar esta teoría de perturbaciones a orden lineal para el modelo  $\Lambda$ CDM y para modelos de gravedad modificada, para después comparar sus resultados. Además, como varios de los modelos de GM están basados, principalmente, en la estructura general de RG añadiendo algunas modificaciones, se tomará que los modelos de GM a nivel de la perturbación de fondo (a orden cero) son similares al modelo  $\Lambda$ CDM. Es decir, los modelos de GM y el modelo  $\Lambda$ CDM serán similares a nivel de fondo, pero sus diferencias serán evidentes a orden lineal de perturbación (a primer orden). Se debe considerar que a nivel de fondo la escala no juega un papel importante, pues la cinemática y la dinámica que predicen los modelos de GM y el modelo  $\Lambda$ CDM son similares a nivel de fondo, la escala tomará importancia sólo a orden lineal de perturbación en donde la dinámica será diferente para cada modelo, prediciendo así, una formación de estructura diferente. Se espera que estas desviaciones sean vistas a través de espectro de potencias,  $P(k)$ , al igual que en la función de crecimiento  $f(z)$  para las distorsiones al corrimiento al rojo.

---

<sup>2</sup>Para un estudio más completo de varios de los modelos de gravedad modificada, ver la Ref [27].

## 3.2. Gravedad de Brans-Dicke

Uno de los modelos más simples de GM es el de Brans-Dicke (BD) [22]. El modelo de BD está basado en el *principio de Mach*, el cual menciona que; la medida de inercia no sólo depende de la cantidad de materia de un cuerpo, sino también del fondo de las partes distantes del Universo, es decir, la masa inercial de un cuerpo dependerá de sus alrededores. Este concepto de masa inercial variable lleva a el problema de medir masa en diferentes puntos del espacio-tiempo, pero se puede solucionar si se elige una unidad de masa que sea independiente de estos punto, tal unidad de masa es proporcionada por la gravedad, es la llamada *masa de Planck* dada por  $m_{PL} = (\hbar c^2/G)^{1/2}$ . Si se desea seguir con las unidades de masa, entonces se puede construir la cantidad adimensional  $\chi = m\sqrt{G}$  (donde  $\hbar = c^2 = 1$ ), donde un cambio en  $\chi$  indicará que  $G$  está cambiando. Es la conclusión a la que llegaron Brans y Dicke en su aproximación al principio de Mach [65].

La relación entre  $G$  y la estructura a gran escala en el Universo se puede ver de la siguiente manera. De la ley de gravitación universal, la aceleración causada por un cuerpo de masa  $m$  es  $a = Gm/r^2$ , y a partir de un análisis dimensional, en términos de la distribución de masa,  $a \sim mRc^2/Mr^2$ . Combinando ambas expresiones, se obtiene

$$\frac{1}{G} = \frac{M}{c^2 R}. \quad (3.4)$$

donde el radio de Hubble está dado por  $R_H = c/H$ , la masa contenida dentro de este radio es  $M = 4\pi\rho R^3/3$ . De aquí se observa que existe una relación de  $G$  con  $R$  y la expansión del Universo. C. Brans y R. Dicke interpretaron esto como una manifestación del principio de Mach, al cual Brans le dio su propia forma [23]. Se postuló que la constante de gravitación  $G$  es una variable de campo, que se comporta como el recíproco de un campo escalar  $\psi$ ;  $G \sim \psi^{-1}$ , que satisface una ecuación de campo proveniente de un lagrangiano  $L_\psi = -\omega_{BD}g^{\mu\nu}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}$ , la cual resultaría en la ecuación de movimiento de una onda para  $\psi$ , con  $\omega_{BD}$  una constante de acoplamiento<sup>3</sup>. Sin embargo, la constante  $\omega_{BD}$  tiene las mismas dimensiones de  $G$ , que de hecho es la constante que se deseaba evitar desde el principio, ya que el nuevo campo escalar  $\psi$  debería reemplazarla. Por lo tanto, la constante de acoplamiento  $\omega_{BD}$  se hará adimensional a través de redefinir el lagrangiano como:

$$L_\psi = -\frac{\omega}{\psi}g^{\mu\nu}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}. \quad (3.5)$$

La teoría incluye un campo escalar acoplado a la gravedad o en otras palabras a la geometría del espacio-tiempo, donde justamente la constante que acopla a la gravedad y al campo escalar es  $\omega_{BD}$ . La ecuación (3.5) se incorpora a través de la acción de Einstein-Hilbert en la parte que contiene la información de la geometría de la siguiente manera,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g} \left( \psi R - \frac{\omega_{BD}}{\psi}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} \right) + \int d^4x\sqrt{-g}L_m. \quad (3.6)$$

---

<sup>3</sup> $\psi_{,\mu} = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}$ ,  $\psi^{;\mu} = \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$  y  $\psi_{;\mu}$  es la derivada covariante.

Se puede comprobar que, al hacer la variación con respecto a la métrica, se obtienen las ecuaciones de campo siguientes [65]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi}{\psi}T_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\psi^2} \left( \psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\psi^{,\lambda}\psi_{,\lambda} \right) - \frac{1}{\psi} (\psi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\psi), \quad (3.7)$$

donde  $\square$  es el operador de D'Alembert. De igual manera, la variación con respecto de  $\psi$  lleva a la ecuación

$$2\psi\square\psi - \psi_{,k}\psi^{,k} = \frac{R}{\omega_{BD}}\psi^2, \quad (3.8)$$

combinando la ecuación (3.8) y la forma contraída de la ecuación (3.7) [22], se tiene

$$\square\psi = \frac{8\pi}{2\omega + 3}T, \quad (3.9)$$

$T$  es la traza de  $T_{\nu}^{\mu}$ . Una aproximación natural a (3.9) es considerar el efecto de la materia local sobre un fondo  $\psi_0$  igual al valor presente observado [23],

$$\psi \approx \psi_0 + \left[ \frac{1}{4\pi(2\omega + 3)} \right] \sum_{m \text{ local}} \frac{m}{r}, \quad (3.10)$$

$r$  es el radio local que ocupa la masa  $m$ ,  $M/R = \sum m/r$ .

Al considerar una fuente no relativista, como la materia bariónica,  $T_0^0 = -\rho$ . Al tomar las perturbaciones de la métrica a orden lineal, es decir,  $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$  y considerando la norma de Newton [54], se llega al elemento de línea

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \quad (3.11)$$

también considerando las perturbaciones en el campo escalar  $\psi = \psi_0 + \phi$ , donde  $\phi$  es la perturbación. A partir de esta métrica perturbada y este campo escalar perturbado, junto con la ecuación (3.7), se encuentran las ecuaciones de Einstein perturbadas siguientes

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\rho - \frac{1}{2}\nabla^2\phi, \quad (3.12)$$

$$(3 + 2\omega_{BD})\nabla^2\phi = -8\pi G\rho, \quad (3.13)$$

$$\Phi - \Psi = \phi. \quad (3.14)$$

Estas ecuaciones pueden ser reescritas como:

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\mu\rho, \quad \Psi = \gamma^{-1}\Phi, \quad (3.15)$$

donde

$$\mu = \frac{4 + 2\omega_{BD}}{3 + 2\omega_{BD}}, \quad \gamma = \frac{1 + \omega_{BD}}{2 + \omega_{BD}}. \quad (3.16)$$

RG se recupera en el límite de valores grandes de  $\omega_{BD}$ . Ésto se puede ver a partir de la ecuación (3.9) donde si  $\omega_{BD} \rightarrow \infty$ , implica que  $\psi \rightarrow cte$ , al sustituir este resultado

en la ecuación (3.7) se obtienen las mismas ecuaciones de Einstein. La restricción experimental actual sobre  $\omega_{BD}$  está dado por  $\omega_{BD} > 40,000$ . Una vez impuesta esta restricción en el parámetro  $\omega_{BD}$  del modelo, la teoría es básicamente indistinguible de RG en todas las escalas [54].

Si a esta teoría se le agrega un potencial  $V(\psi)$  en la ecuación (3.6) se vuelve más interesante y puede ser capaz de ser un candidato de energía oscura.

### 3.3. Gravedad $f(R)$

Existen dos formas de dar explicación a la expansión acelerada del universo. Una es a través de los modelos de energía oscura (EO) basadas en las modificaciones del lado derecho de las ecuaciones de Einstein.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{EO}). \quad (3.17)$$

La otra forma es modificar el lado izquierdo de las ecuaciones Einstein, es decir, que la geometría del espacio-tiempo descrita por RG es incorrecta. Una manera de trabajar con modelos de GM es a través de implementar una función del escalar de curvatura de Ricci, es decir, una  $f(R)$  en la acción de Einstein-Hilbert.

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \left[ \frac{1}{16\pi G} f(R) + L_m \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.18)$$

Aplicando el principio de mínima acción, haciendo las variaciones con respecto a la métrica, se obtiene [17]:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

donde  $f'(R) = df(R)/dR$ . El problema que presenta esta teoría  $f(R)$  es que hay derivadas de cuarto orden, ya que están incluidas dos derivadas extras a las dos que ya tiene  $R$ , esto aparece justamente en el tercer término de la parte izquierda de la ecuación (3.19). Nótese que si  $f(R) = R$  se obtienen las mismas ecuaciones de RG.

Una vez teniendo las ecuaciones en esta teoría alternativa  $f(R)$ , las ecuaciones cosmológicas se derivan de la misma forma que para RG. Las ecuaciones cosmológicas de FLRW para un espacio-tiempo plano son [17]:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3f'(R)} [\rho + \rho^{(ef)}], \quad (3.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{6f'(R)} [\rho + \rho^{(ef)} + 3(p + p^{(ef)})]. \quad (3.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho^{(ef)} &= \frac{Rf'(R) - f(R)}{16\pi G} - \frac{3H\dot{R}f''(R)}{8\pi G} \\ p^{(ef)} &= \frac{f(R) - Rf'(R)}{16\pi G} + \frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2f'''(R) + 2H\dot{R}f''(R)}{8\pi G}. \end{aligned}$$

Así la ecuación de estado para la gravedad  $f(R)$  resulta ser,

$$\omega^{(ef)} = \frac{p^{(ef)}}{\rho^{(ef)}} = \frac{f(R) - Rf'(R) + 2\left(\ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) + 2H\dot{R}f''(R)\right)}{Rf'(R) - f(R) - 6H\dot{R}f''(R)}. \quad (3.22)$$

Finalmente la ecuación de continuidad (1.25) sigue siendo la misma ecuación para la gravedad  $f(R)$ .

La ecuación (3.20) se puede escribir de la siguiente manera:

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2 f'(R)}(\rho + \rho^{(ef)}), \quad (3.23)$$

ahora redefiniendo la densidad crítica del Universo como,

$$\rho_{gm}^c = \frac{3H^2 f'(R)}{8\pi G}, \quad (3.24)$$

sustituyendo en la ecuación modificada de FLRW (3.23) se tiene,

$$1 = \frac{\rho}{\rho_{gm}^c} + \frac{\rho^{(ef)}}{\rho_{gm}^c} = \Omega_M + \Omega_{gm}, \quad (3.25)$$

donde ahora en lugar de tener  $\Omega_\Lambda$  se tiene  $\Omega_{gm}$ , es decir, una densidad de energía que representa el efecto de la gravedad modificada, la cual tendrá un valor diferente para cada modelo de  $f(R)$ . Varios de estos modelos se muestran en [17, 25].

### 3.4. Parametrización Post Friedmanniana

Cuando se tiene una teoría alternativa se debe de crear una lista de cantidades observables y después se debe comparar con los datos. Ésto no es tarea fácil y además consume mucho tiempo. En los últimos años ha sido de gran interés el desarrollo de un paso intermedio entre la teoría y los datos, tal que, nos permita evitar la elaboración de cada modelo y abarcar una amplia gama de esquemas teóricos, al menos en las perturbaciones de orden cero y a primer orden. A tal enfoque fenomenológico se le denomina **Parametrización Post Friedmanniana** (PPF) [49], inspirada por el formalismo llamado Parametrización Post Newtoniana (PPN) [85], creado para hacer frente a las teorías alternativas de gravedad con las mediciones del Sistema Solar. Como ya se mencionó, la idea es asumir el modelo  $\Lambda$ CDM como orden cero o nivel de fondo (background) y parametrizar las desviaciones de RG de las perturbaciones a primer orden [43]. Muchas teorías de GM se pueden comportar muy parecido a  $\Lambda$ CDM, si uno así determina sus parámetros, pero a nivel perturbativo la cinemática será diferente.

Existen varias parametrizaciones de GM, de entre las cuales, uno ampliamente utilizado, entre la comunidad científica, es el propuesto por *Bertschinger y Zukin*

(BZ) [19], donde son introducidas dos funciones que dependen del tiempo y de la escala (tamaño) motivadas por las soluciones  $f(R)$  en el límite cuasi-estático. Esto ha sido mostrado en algunos trabajos y válido para aplicaciones de formación de estructura a gran escala en los modelos  $f(R)$  [21].

Como punto de partida se asumirá que el universo de fondo está descrito por la métrica plana de FLRW y se considerarán, únicamente, perturbaciones lineales en esta métrica y en el tensor de energía-momento, ver ecuación (1.22).

Al hacer las perturbaciones de la métrica a primer orden,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.26)$$

donde  $h_{\mu\nu}$  es la perturbación, así el elemento de línea resulta,

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ -(1 + h_{\mu\mu})d\tau^2 + 2h_{\mu i}d\tau dx^i + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \right]. \quad (3.27)$$

La métrica perturbada  $h_{\mu\nu}$  se puede descomponer en modos escalares, vectoriales y tensoriales [64]. En la norma de Newton<sup>4</sup>, las perturbaciones lineales del elemento de línea contienen los modos escalares, por lo tanto,

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ -(1 + 2\psi)d\tau^2 + (1 - 2\phi)dx^2 \right], \quad (3.28)$$

donde  $\tau$  es el tiempo conforme,  $\psi$  y  $\phi$  son escalares, y son dos potenciales de la métrica. En la norma sincrónica<sup>5</sup>, el elemento de línea perturbado contiene el modo tensorial, entonces,

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ -d\tau^2 + (\delta_{ij} + \mathfrak{h}_{ij})dx^i dx^j \right], \quad (3.29)$$

donde  $\mathfrak{h}_{ij}$  es un tensor. Por definición, en la norma sincrónica,  $g_{00}$  y  $g_{0i}$  del tensor métrico están sin perturbar, es decir,  $h_{\mu\mu} = h_{\mu i} = 0$ . La métrica perturbada  $\mathfrak{h}_{ij}$ , puede descomponerse en una parte con traza  $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h}_{ii}$ , y en una parte sin traza, consistiendo de tres partes,  $\mathfrak{h}_{ij}^{\parallel}$ ,  $\mathfrak{h}_{ij}^{\perp}$  y  $\mathfrak{h}_{ij}^T$ , donde según [62],

$$\mathfrak{h}_{ij} = \frac{\mathfrak{h}\delta_{ij}}{3} + \mathfrak{h}_{ij}^{\parallel} + \mathfrak{h}_{ij}^{\perp} + \mathfrak{h}_{ij}^T. \quad (3.30)$$

---

<sup>4</sup>En la norma de Newton (Newton gauge) sólo son diferentes de cero las perturbaciones escalares  $h_{\mu\mu}$  y  $h^{(S)}$ , ver [75]. La norma newtoniana sólo tiene aplicabilidad perturbativa restrictiva ya que nunca permite la descripción de los modos vectoriales o tensoriales que podrían generarse como producto del colapso gravitacional. Si se ignorara esta limitante se estarían eliminando grados de libertad físicos y no grados de libertad de norma, ver [75].

<sup>5</sup>La norma sincrónica (synchronous gauge) fue introducida por Lifshitz en 1946 [56]. La norma es muy popular para los estudios numéricos. Su principal problema es que no determina completamente la libertad de norma. La norma permite la existencia de un conjunto de observadores que caen libremente, es decir, se mueven sobre geodésicas sin cambiar sus coordenadas espaciales, llamados en la literatura “observadores fundamentales comóviles”. Cada observador está equipado con un reloj que mide el tiempo conforme  $\tau$  y permanece fijo en la coordenada  $x^i$ . Los observadores junto con sus relojes y etiquetas que identifican su geodésica definen las coordenadas en todo el espacio-tiempo. El grado de libertad de norma residual (espurio) se debe a que hay libertad para ajustar las condiciones iniciales de los relojes y las coordenadas espaciales. Esta norma es usada por el código CAMB, que se empleará más adelante.

El tensor longitudinal  $\mathfrak{h}_{ij}^{\parallel}$  también se llama parte escalar de  $\mathfrak{h}$ , la parte selenoidal  $\mathfrak{h}_{ij}^{\perp}$  es también llamada parte vectorial y la parte transversal sin traza  $\mathfrak{h}_{ij}^T$  es llamada parte tensorial [75]. Por definición las divergencias de  $\mathfrak{h}_{ij}^{\parallel}$  y  $\mathfrak{h}_{ij}^{\perp}$  (que son vectores) son vectores longitudinales y transversales, respectivamente, y  $\mathfrak{h}_{ij}^T$  que es transversal [62], satisfacen,

$$\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_l\mathfrak{h}_{lk}^{\parallel} = 0, \quad \partial_i\partial_j\mathfrak{h}_{ij}^{\perp} = 0, \quad \partial_i\mathfrak{h}_{ij}^T = 0. \quad (3.31)$$

De aquí, se sigue que  $\mathfrak{h}_{ij}^{\parallel}$  pueden ser escritos en términos de algún campo escalar  $\mu$  y  $\mathfrak{h}_{ij}^{\perp}$  de algún vector sin divergencia  $\mathbf{A}$  como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{ij}^{\parallel} &= \left( \partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) \mu, \\ \mathfrak{h}_{ij}^{\perp} &= \partial_i A_j + \partial_j A_i, \quad \partial_i A_i = 0. \end{aligned}$$

Los dos campos escalares  $\mathfrak{h}$  y  $\mu$  (o  $\mathfrak{h}_{ij}^{\parallel}$ ) caracterizan el modo escalar de la perturbación métrica, mientras  $\mathbf{A}_i$  (o  $\mathfrak{h}_{ij}^{\perp}$ ) y  $\mathfrak{h}_{ij}^T$  representan el modo vectorial y tensorial, respectivamente.

Ahora, como se va a trabajar en el espacio  $k$  de Fourier, se deben introducir dos campos  $\mathfrak{h}(\mathbf{k}, \tau)$  y  $\eta(\mathbf{k}, \tau)$ , así que, se escribe el modo escalar de  $\mathfrak{h}_{ij}$  como una integral de Fourier [62],

$$\mathfrak{h}_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j \mathfrak{h}(\mathbf{k}, \tau) + (\hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}) 6\eta(\mathbf{k}, \tau) \right], \quad \mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}. \quad (3.32)$$

Nótese que  $\mathfrak{h}$  denota la traza de  $\mathfrak{h}_{ij}$  en ambos espacios. Trabajando con la métrica de la norma de Newton (3.28), se obtiene el tensor de Einstein perturbado  $G_{\mu\nu} = \overline{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}$ , donde  $\overline{G}_{\mu\nu}$  es la perturbación a orden cero y  $\delta G_{\mu\nu}$  es la perturbación a primer orden. Las componentes del tensor  $G_{\mu\nu}$  son:

$$G_{00} = 3\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2\phi - 6\mathcal{H}\dot{\phi}, \quad (3.33)$$

$$G_{0i} = 2\partial_i(\dot{\phi} + \mathcal{H}\psi), \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= -(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2)\delta_{ij} + \left[ \nabla^2(\psi - \phi) + 2\ddot{\phi} + 2(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2)(\phi + \psi) + 2\mathcal{H}\dot{\psi} + 4\mathcal{H}\dot{\phi} \right] \delta_{ij} \\ &+ \partial_i\partial_j(\phi - \psi). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para obtener las ecuaciones de Einstein perturbadas, también se deben de considerar las perturbaciones del contenido de radiación y de materia que incluye fotones, neutrinos, bariones y materia oscura fría, es decir, para la ecuación del tensor de energía-momento (1.22) se tendrá  $T_{\nu}^{\mu} = \overline{T}_{\nu}^{\mu} + \delta T_{\nu}^{\mu}$ , donde  $\overline{T}_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\lambda}\overline{T}_{\lambda\nu}$ ,  $\overline{T}_{\nu}^{\mu}$  es la perturbación a orden cero y  $\delta T_{\nu}^{\mu}$  es la perturbación a primer orden. Las componentes de  $T_{\nu}^{\mu}$  son:

$$\begin{aligned} T_0^0 + \delta T_0^0 &= -\rho(1 + \delta), \\ T_i^0 + \delta T_i^0 &= (\rho + P)v_i = -T_0^i, \\ T_j^i + \delta T_j^i &= (P + \delta P)\delta_j^i + \pi_j^i. \end{aligned}$$

Donde  $\delta$  es la densidad de contraste ya definida anteriormente,  $v$  es el campo vectorial de velocidades,  $\delta P$  es la perturbación en la presión y  $\pi_j^i$  denota las componentes de la perturbación del tensor de energía-momento pero sin traza, es el tensor de presión anisotrópica.

A menos de que se indique lo contrario, todas las cantidades, como la densidad, son la suma sobre todas las especies presentes en el Universo. Trabajando en el espacio de Fourier, es conveniente introducir la perturbación de la densidad relativa comóvil  $\Delta$ , es decir,

$$\rho\Delta = \rho\delta + 3\frac{\mathcal{H}}{k}(\rho + P)v, \quad (3.36)$$

El estrés anisotrópico  $\sigma$  y el momento perturbado  $\theta \equiv \nabla_i v^i$  se definen como [48]:

$$(\rho + P)\sigma \equiv -\left(\hat{\mathbf{k}}^i \hat{\mathbf{k}}_j - \frac{1}{3}\delta_j^i\right) \pi_j^i, \quad (3.37)$$

$$(\rho + P)\theta \equiv ik^j \delta T_j^0. \quad (3.38)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein perturbadas a orden lineal, con la métrica de la norma de Newton y en el espacio de Fourier, son:

$$k^2\phi - 3\mathcal{H}(\dot{\phi} + \mathcal{H}\psi) = -4\pi Ga^2\delta\rho, \quad (3.39)$$

$$\partial_i(\dot{\phi} + \mathcal{H}\psi) = -4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta, \quad (3.40)$$

$$\ddot{\phi} + \mathcal{H}(\psi + 2\dot{\phi}) + (2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2)\psi + \frac{k^2}{3}(\phi - \psi) = \frac{4\pi}{3}Ga^2\delta P, \quad (3.41)$$

$$k^2(\phi - \psi) = 12\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma. \quad (3.42)$$

Dada la conservación del tensor energía-momento

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^{\nu\beta} = 0, \quad (3.43)$$

proporciona dos ecuaciones relacionando el potencial métrico y la perturbación en cada fluido. En la norma de Newton son:

$$\dot{\delta} = -(1 + \omega)(\theta - 3\dot{\phi}) - 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \omega\right)\delta, \quad (3.44)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{a}}{a}(1 - 3\omega)\theta - \frac{\dot{\omega}}{1 + \omega}\theta + \frac{\delta P/\delta\rho}{1 + \omega}k^2\delta - k^2\sigma + k^2\psi, \quad (3.45)$$

con  $\omega = P/\rho$ . Las ecuaciones (3.44) y (3.45) son las versiones relativistas de la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler, respectivamente, donde en el límite  $P \ll \rho$ , se recuperan las ecuaciones de continuidad y de Euler con respecto al tiempo conforme. El estrés anisotrópico desaparece para bariones y materia oscura fría. Mientras que para las especies relativistas, es decir, fotones y neutrinos que se generan a través del free-streaming (flujo libre) están relacionados con  $\delta$  y  $\theta$  por medio de las ecuaciones de Boltzmann (sin colisiones), ver referencia [62].

Son necesarias dos ecuaciones más para cerrar el sistema de ecuaciones, para la métrica y su relación con el tensor de energía-momento. Por ejemplo, en RG, la ecuación de Poisson relaciona las perturbaciones de la densidad comóvil y el potencial métrico  $\phi$ , y se obtiene al combinar las ecuaciones (3.39) y (3.40). Mientras que la ecuación anisotrópica (3.42) relaciona los dos potenciales métricos y al estrés anisotrópico,

$$k^2\phi = -4\pi Ga^2\rho\Delta, \quad (3.46)$$

$$k^2(\phi - \psi) = 12\pi Ga^2(\rho + P)\sigma, \quad (3.47)$$

en una teoría alternativa de gravedad estas ecuaciones serían generalmente diferentes. Por lo tanto, la tarea de estudiar la evolución de la estructura de la materia y las anisotropías de la RCF en diferentes modelos de GM, como ya se mencionó, es algo tedioso y engorroso. Por tal razón, el formalismo PPF fue el propuesto para estudiar los diferentes modelos teóricos de GM dentro del mismo formalismo de las perturbaciones a primer orden. Para parametrizar las posibles desviaciones del crecimiento  $\Lambda$ CDM en las últimas etapas de su evolución (por ejemplo, corrimientos al rojo  $z < 30$  cuando las contribuciones de las especies relativistas pueden ser despreciadas) el formalismo PPF funciona bien [48]. Como ya se dijo, la parametrización se puede lograr introduciendo dos funciones libres que dependan del tiempo (o del factor de escala) y de la escala  $k$ :  $\mu(a, k)$  y  $\gamma(a, k)$ , que modifica las ecuaciones (3.46) y (3.47) con el fin de abarcar un grupo de modelos de GM. En consecuencia, se puede escribir:

$$k^2\psi = -4\pi Ga^2\mu(k, a)\rho\Delta, \quad (3.48)$$

$$\frac{\phi}{\psi} = \gamma(k, a), \quad (3.49)$$

donde se recupera RG cuando  $\mu = \gamma = 1$ , caso  $\sigma = 0$ . Notesé que, en estas ecuaciones, el potencial Newtoniano es  $\psi$  y aparece en el lado izquierdo de la ecuación (3.48), mientras que el potencial de curvatura  $\phi$  cumple con la ecuación de Poisson (3.46). Esto es motivado por el hecho de que ningún observable físico depende únicamente de  $\phi$ . Por ejemplo, el efecto de lente gravitacional débil (weak gravitational lensing) examina la combinación  $(\phi + \psi)$ , mientras que la agrupación de la materia y las velocidades peculiares, guardan una relación más cercana con  $\psi$ , que se deduce de las ecuaciones de conservación (3.44) y (3.45). Por lo tanto, las mediciones de las velocidades peculiares y el conteo de galaxias (hasta un factor de sesgo) pueden restringir a la función  $\mu$  más directamente. Silvestri [78] ha mostrado que en un conjunto de modelos de variables, en el que las teorías locales de gravedad son consideradas poseyentes, únicamente, de un grado de libertad extra y ecuaciones de movimiento de segundo orden en el límite cuasi-estático, las funciones  $\mu(a, k)$  y  $\gamma(a, k)$  deben ser coeficientes de polinomios incluso de segundo orden para  $k$  y en general el numerador de  $\mu$  es el mismo que el denominador de  $\gamma$ .

Como se pretende obtener las desviaciones de las perturbaciones, en los modelos de GM, se necesita saber la forma que tendrá  $\mu(a, k)$  y  $\gamma(a, k)$ . Estas funciones

proviene de las teorías  $f(R)$ , vistas en la sección anterior, a partir de la traza de las ecuaciones de Einstein, es decir, al tener la ecuación (3.19), la traza de la ecuación es

$$3\Box f' + f'R - 2f = 8\pi GT, \quad (3.50)$$

donde  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ . La ecuación (3.50) gobierna la dinámica de un campo escalar  $\Phi \equiv f'$ , llamado *escalaton* [79], con un potencial efectivo que depende de la densidad de materia y da al escalaton una masa efectiva [43]

$$m_{f'}^2 \equiv \left( \frac{f'}{f''} - R \right), \quad (3.51)$$

en un modelo  $f(R)$  a esta masa efectiva se le asocia una *longitud de onda de Compton* del escalaton, según [43, 48, 50, 88, 47, 71, 66, 39]

$$\lambda_C = \frac{2\pi}{m_{f'}}, \quad (3.52)$$

el escalaton es un mediador de una “quinta fuerza” atractiva relacionado con la gravedad modificada, tiene un rango determinado por la longitud de onda de Compton. La longitud de onda de Compton del escalaton introduce una escala que separa dos regímenes de la dinámica gravitacional del sub-horizonte ( $k \gg aH$ ), durante el cual, el comportamiento de la gravedad es diferente. Sobre las escalas  $\lambda \gg \lambda_C$ , el escalaton es masivo y la “quinta fuerza” es exponencialmente suprimida, entonces las desviaciones de RG son despreciables. Sin embargo, en escalas dentro del radio de Compton, el escalaton es ligero y las desviaciones son significativas. La relación entre  $\psi$  y  $\phi$ , y la relación de ellos con la densidad de contraste será diferente en escalas por debajo de la escala de Compton y eso afecta a la función de crecimiento de la estructura. En particular, cuando  $\lambda \ll \lambda_C$ , los potenciales llegan a ser  $\psi \simeq 2\phi$  [71].

Para describir la formación de estructura en un modelo  $f(R)$  es necesario expandir  $f' = f'(R)$  en teoría de perturbaciones,  $\delta f'$ . Por lo tanto, en  $f(R)$  aparecen nuevos términos en la ecuación de Poisson y en la del acoplamiento gravitacional [43]. Uno obtiene, a primer orden [47]:

$$k^2\psi - k^2\frac{\delta f'}{2f'} + \frac{3}{2} \left[ \left( \dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2 \right) \frac{\delta f'}{f'} - \left( \dot{\phi} - \mathcal{H}\psi \right) \frac{\delta f'}{f'} \right] = \frac{a^2}{16\pi G} \frac{\rho}{f'} \Delta, \quad (3.53)$$

$$\psi + \phi = -\frac{\delta f'}{f'}, \quad (3.54)$$

el punto indica derivada con respecto al tiempo conforme. Pero como se mencionó arriba, el formalismo PPF trata a las perturbaciones a primer orden. Por lo tanto, la parametrización propuesta por Bertschinger y Zukin [19] da a las funciones  $\mu$  y  $\gamma$  la siguiente forma:

$$\mu(a, k) = \frac{1 + \beta_1 \lambda_1^2 k^2 a^s}{1 + \lambda_1^2 k^2 a^s}, \quad (3.55)$$

$$\gamma(a, k) = \frac{1 + \beta_2 \lambda_2^2 k^2 a^s}{1 + \lambda_2^2 k^2 a^s}, \quad (3.56)$$

donde las  $\beta_i$  son consideradas como acoplamientos adimensionales,  $\lambda_1$  es la longitud de onda de Compton y  $s$  codifica su dependencia temporal. Como se muestra en [88], los parámetros  $\{\beta_i, \lambda_i^2\}$  están relacionados de la siguiente manera

$$\beta_1 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = 2 - \beta_2 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}, \quad (3.57)$$

y  $1 \leq s \leq 4$ , de hecho, el modelo  $f(R)$  que se aproxima a  $\Lambda$ CDM es cuando  $s \simeq 4$ . En la figura (3.1) se muestra el comportamiento de la función  $\mu(a)$  y de igual manera la forma de la función  $\gamma(a)$  para diferentes valores de  $s$ .

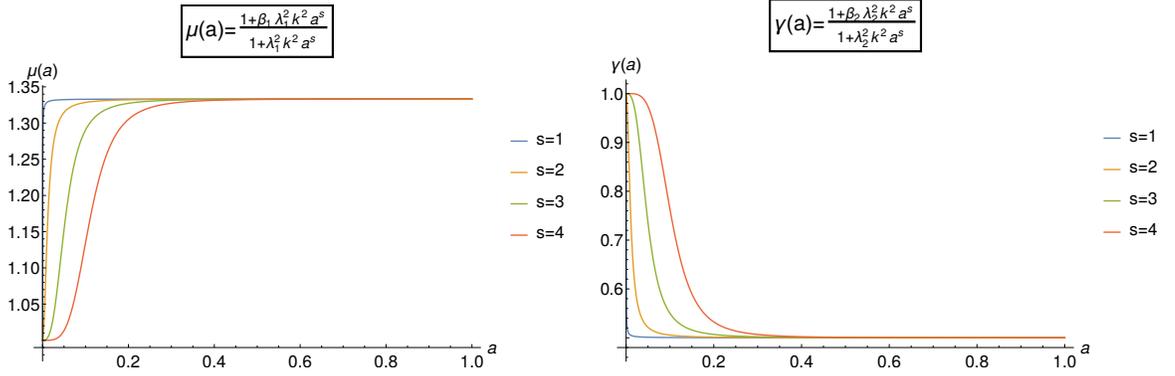


Figura 3.1: A la izquierda se muestra el comportamiento de la función  $\mu$ . Se ha tomado el valor de  $\beta_1 = \frac{4}{3}$ ,  $\lambda_1^2 = 750 \text{ Mpc}^2$  y  $k^2 = 9 \frac{1}{\text{Mpc}^2}$ . A la derecha el comportamiento de la función  $\gamma$ . Aquí se ha tomado el valor de  $\beta_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2^2 = 1000 \text{ Mpc}^2$ . Las gráficas fueron hechas con el software Mathematica 10.0.

Se observa que para  $a \rightarrow 1$ , que representa la época actual del Universo, implica que  $\mu \rightarrow 1.33$ ,  $\gamma \rightarrow 1/2$ . Y conforme  $a$  decrece, las funciones  $\mu$  y  $\gamma$  se aproximan a 1, es decir, las desviaciones con respecto a  $\Lambda$ CDM son menores.

En la figura (3.2) se muestra el comportamiento de  $\mu(a, k)$  y de  $\gamma(a, k)$  para diferentes valores de  $s$ .

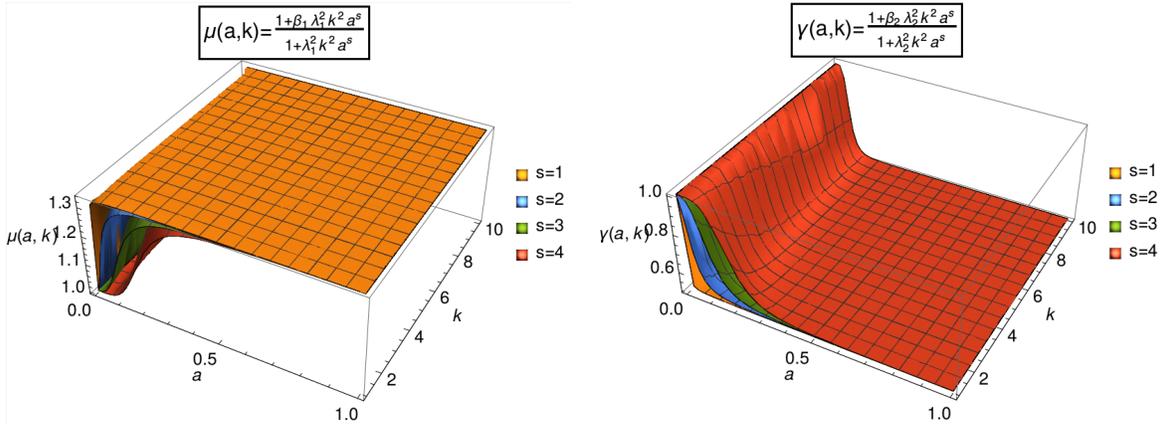


Figura 3.2: A la izquierda se muestra el comportamiento de la función  $\mu(a, k)$ , donde se ha tomado el valor de  $\beta_1 = \frac{4}{3}$ ,  $\lambda_1^2 = 750 \text{ Mpc}^2$ . A la derecha el comportamiento de la función  $\gamma$ , con los valores de  $\beta_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2^2 = 1000 \text{ Mpc}^2$ . Las gráficas fueron hechas con el software Mathematica 10.0.

Lo que significa es que; las desviaciones con respecto al modelo  $\Lambda\text{CDM}$  son de aproximadamente un 33%, dado que  $\mu \rightarrow 1.33$  hoy en día. Conforme el valor de  $s < 4$ , las desviaciones comienzan a ser evidentes, aún cuando el valor del factor de escala es pequeño. El comportamiento de la función  $\mu$  es muy importante, ya que, la formación de estructura depende de ésta, a través de la ecuación de Poisson.

# Capítulo 4

## RSD en Modelos de Gravedad Modificada

Uno de los problemas más importantes que debe resolver la cosmología es el fenómeno de la formación de estructura en el Universo. Este tema ha sido abordado a partir de las perturbaciones cosmológicas, llegando así, a una ecuación diferencial de segundo orden para el contraste de densidad de la materia. Dicha ecuación da información de cómo se ha estado formando la estructura en el Universo, y más aún, se han definido dos parámetros muy importantes, que son; el factor de crecimiento  $D_+$  y la función de crecimiento  $f$ , cuya relación está dada por  $f = \frac{a}{D} \frac{dD}{da}$ . La función de crecimiento está relacionada con la densidad de materia en el Universo, a través de la expresión  $f = \Omega_m^\gamma$ , donde el parámetro  $\gamma$  es el índice de crecimiento, cuyo valor para RG es  $\gamma \approx 0.55$ .

$$f(z) = \Omega_m^\gamma(z) = \left[ \frac{(1+z)^3}{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0}} \right]^\gamma. \quad (4.1)$$

La teoría aceptada de la gravedad es, como se sabe, RG, pero ¿en realidad es la más precisa? Es decir, ¿existirá una teoría que pueda ser más precisa que ésta? De ser así, esta nueva teoría no debería desviarse mucho de RG. En verano, de 2016, se publicó un artículo sobre mediciones de RSD a partir del espectro y el biespectro de potencias de DR12 BOSS<sup>1</sup> [42], en donde se dejó como parámetro libre a la función de crecimiento  $f$  y se llegó a un valor para el índice de crecimiento de  $\gamma = 0.719^{+0.080}_{-0.072}$ , es decir, una desviación de aproximadamente 30 % con respecto al valor predicho por RG. Los autores de dicho trabajo han tratado de justificar la medición atribuyéndolo a:

- Una fluctuación estadística sobre el valor medido de  $f\sigma_8$ .
- Una incertidumbre sistemática no registrada en los datos de BOSS ó Planck15.
- Una indicación de una falla de  $\Lambda$ CDM o del modelo de gravedad de RG.

---

<sup>1</sup>Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS).

El presente trabajo ha mostrado diferentes modelos alternativos de gravedad modificada, de entre los cuales, el que se empleará para los cálculos es el modelo PPF, ya que representa un modelo aproximado para muchas teorías alternativas de gravedad. Para este modelo PPF, la ecuación para el contraste de densidad se modifica como:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}H^2\Omega_m\mu(a, k)\delta = 0. \quad (4.2)$$

En particular, se usará la parametrización BZ, ver ecuación (3.55). Nótese que la ecuación (4.2) ahora depende del parámetro  $k$ , que antes no se tenía. Esto implica una función de crecimiento para cada valor de  $k$ , cuyo resultado se verá reflejado en el espectro de potencias de la materia. Lo que se pretende es obtener el espectro de potencias para esta ecuación. Resolver la ecuación diferencial y después obtener el espectro de potencias de manera teórica es un tanto complicado y tedioso, así que, se hará uso de un código que resuelve las ecuaciones de Boltzmann para todas las componentes cósmicas, junto con las ecuaciones de gravedad modificada.

Se utilizará el software *CosmoSIS* [89, 5]. El programa calcula el espectro de potencias de la materia en el régimen lineal  $P(k)$ , a partir de parámetros cosmológicos usando el código de Boltzmann, que resuelve las ecuaciones de perturbaciones del capítulo 2, acopladas con todos los elementos del Universo: materia, radiación y neutrinos. Para los cálculos de gravedad modificada se tuvo que hacer un modulo propio en el que se pudiese emplear *MGCAMB*<sup>2</sup> [48, 88]. Por defecto, *MGCAMB* calcula el espectro de potencias de la materia en el régimen lineal (perturbaciones a primer orden). La parte no lineal (perturbaciones de orden mayor a uno) se obtiene implementando el *halofit*. El *halofit* se refiere al halo de materia oscura y CosmoSIS lo calcula a partir de la parte lineal. Por lo tanto, para calcular el espectro de potencias de galaxias se tiene  $P_g(k, z) = b^2(k, z)P_{NL}(k, z)$ , tal como lo menciona el artículo [89]. Desafortunadamente, *halofit* no puede ser implementado para los modelos de GM, pues aún no está incorporado en CosmoSIS, sin embargo, la teoría de un *halofit* para GM ya ha sido desarrollada [87] y existe un programa llamado *MGhalofit* que calcula, únicamente, el *halofit* del modelo de gravedad  $f(R)$  de Hu-Sawicki [50], para obtener el espectro de potencias de materia en la parte no-lineal<sup>3</sup>. CosmoSIS obtiene el espectro de potencias como  $P(k) = \delta^2$ , donde  $P(k)$  es el espectro de potencias total, no sólo el de materia oscura o materia bariónica.

El propósito del trabajo es comparar las predicciones del modelo  $\Lambda$ CDM y el modelo de Bertschinger y Zukin de gravedad modificada, para la formación de estructura en el Universo. Esto se realizará a través de obtener el espectro de potencias para ambos modelos, donde por medio de las gráficas se observarán sus desviaciones. Además, se obtendrá el espectro de potencias para las galaxias incorporando

---

<sup>2</sup>Modification of Growth with CAMB (MGCAMB). Code for Anisotropies in the Microwave Background (CAMB).

<sup>3</sup>En CosmoSIS se puede emplear el modulo que calcula halofit a partir del espectro de potencias lineal de algún modelo de GM, pero los resultados no son del todo correctos, y por tanto, no se puede confiar en ellos.

las distorsiones al corrimiento al rojo en ambos modelos y se observará cual de los dos se ajusta mejor a los datos obtenidos por BOSS. Está más allá del propósito del presente trabajo hacer un estudio estadístico que soporte el valor de las desviaciones.

## 4.1. $\Lambda$ CDM

Los primeros resultados se muestran en la figura (4.1), aquí sólo se considera el modelo  $\Lambda$ CDM en donde para la ecuación (4.2) el valor de  $\mu(a, k) = 1$ .

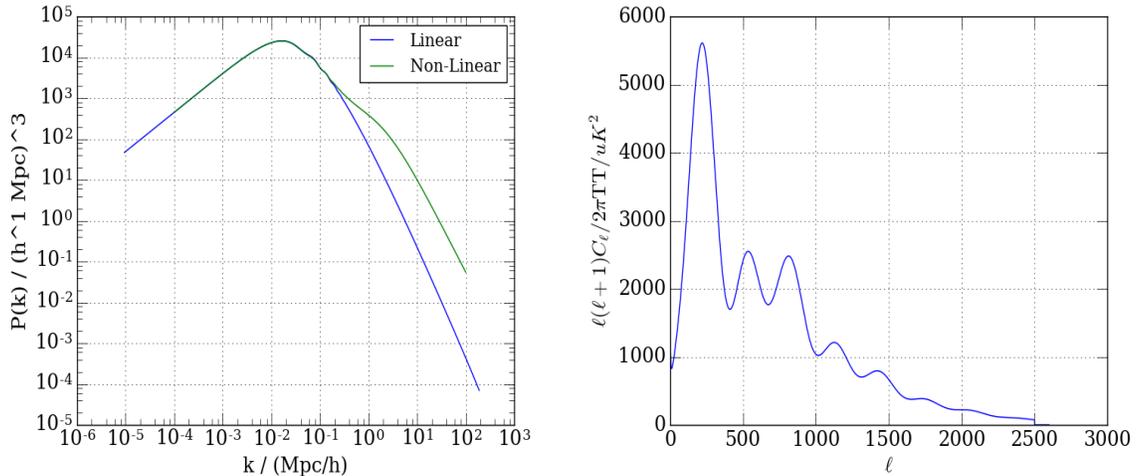


Figura 4.1: *Espectros de potencias. A la izquierda se muestra el espectro de potencias de materia en el régimen lineal y no lineal. A la derecha se observa el espectro de potencias para la radiación, es la RCF. La forma del espectro de la RCF depende del valor de los parámetros cosmológicos del modelo  $\Lambda$ CDM. Las gráficas se obtuvieron a partir de ejecutar el demo1.ini de CosmoSIS.*

Los parámetros cosmológicos que usa CosmoSIS para obtener los dos espectros de potencias en la figura anterior se muestran en la tabla (4.1).

$\Omega_m$	$\Omega_{mo}$	$\Omega_b$	$\Omega_\Lambda$	$h_0$	$n_s$	$t$	$\tau$	$\sigma_8$
0.3089	0.2609	0.048	0.6911	0.6774	0.96	$13.7968 \times 10^9$ años	0.066	0.8235

Cuadro 4.1: *Valores obtenidos del mejor ajuste para los parámetros cosmológicos dados por CosmoSIS. De hecho, son los mismos valores dados por Planck. Los valores son los usados para obtener ambos espectros de potencias.*

CosmoSIS obtiene la probabilidad de que cierto conjunto de parámetros cosmológicos sean correctos dados los datos. Los datos que se utilizaron para el mejor ajuste de los parámetros son a partir de los resultados de Planck 2013 [13]. Para más información del como obtener el mejor ajuste para los parámetros cosmológicos véase la

referencia [84]. Básicamente, lo que se calcula es, la probabilidad de obtener cierto valor para los parámetros dados los datos observacionales empleando el *Teorema de Bayes*.

Se observa que el punto más alto para el espectro de potencias de materia corresponde aproximadamente a  $k \approx 0.02 \frac{h}{\text{Mpc}}$ . Para valores un poco más grandes, se observan las oscilaciones acústicas de bariones y en  $k \approx 0.18 \frac{h}{\text{Mpc}}$  comienzan los efectos de la parte no lineal, es decir perturbaciones de orden mayor a uno. Se puede ver mejor en la figura (4.2).

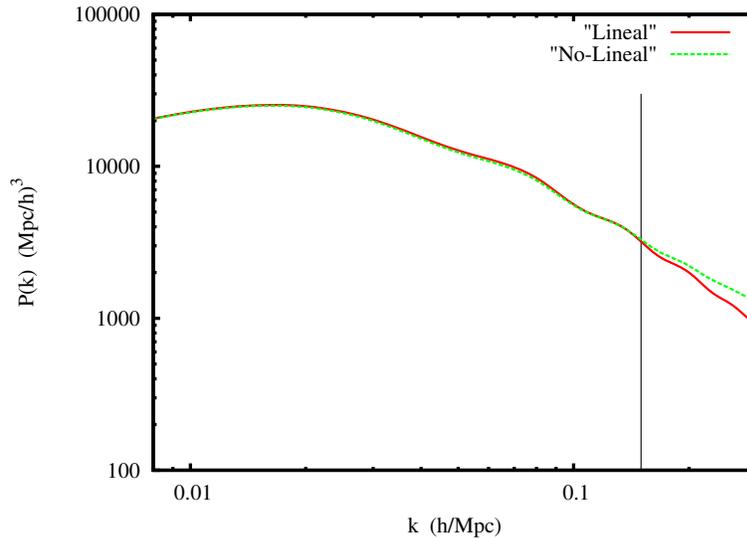


Figura 4.2: *Espectro de potencias de materia. Se observa que el valor máximo de  $P(k)$  corresponde a  $k \approx 0.017$ . Los efectos del régimen no-lineal se encuentran en  $k \approx 0.15$ . De igual manera se observan unas pequeñas oscilaciones para  $0.05 \leq k \leq 0.25$ , que corresponde precisamente a BAO. La línea negra representa la separación entre los efectos del régimen lineal y no-lineal.*

También, es de interés obtener la evolución del factor de crecimiento  $D(z)$  y de la función de crecimiento  $f(z)$ . CosmoSIS obtiene dicha evolución pero no resolviendo la ecuación (4.2) con  $\mu = 1$ , sino resolviendo las ecuaciones de Boltzmann completas. Es decir,  $df/dt = 0$  y  $df/dt = C(f)$  donde  $C(f)$  es el término colisional, y en general la función de distribución ( $f$ ) depende de las posiciones, momentos y del tiempo. Las ecuaciones de Boltzmann se resuelven de forma acoplada con las ecuaciones de Einstein perturbadas, ver referencia [62].

Ahora bien, si la ecuación (4.2) se reescribe en términos de derivadas con respecto al factor de escala y no con respecto a  $t$ , y dada la definición del parámetro de desaceleración  $q$ , ver ecuación (1.43), se llega a que,

$$\delta'' + (2 - q) \frac{\delta'}{a} - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{a^2} \delta = 0, \quad (4.3)$$

donde el apóstrofe denota la derivada con respecto al factor de escala. Si ahora, se define el crecimiento como la razón de la amplitud de perturbación en algún factor de escala arbitrario en relación con algún factor de escala inicial,  $D = \delta(a)/\delta(a_i)$ , la ecuación vendrá dada como:

$$D'' + \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{w(a)}{1 + X(a)} \right] \frac{D'}{a} - \frac{3}{2} \frac{X(a)}{1 + X(a)} \frac{D}{a^2} = 0, \quad (4.4)$$

donde se ha tomado:

$$X(a) = \frac{\Omega_m}{1 - \Omega_m} \exp \left[ -3 \int_a^1 \omega(a') d \ln(a') \right] = \Omega_m a^{-3} / (\delta H^2 / H_0^2), \quad (4.5)$$

$$(\delta H^2 / H_0^2) = (1 - \Omega_m) \exp \left[ 3 \int_a^1 \omega(a') d \ln(a') \right], \quad (4.6)$$

$$\omega(a) = \omega_0 + (1 - a)\omega_a. \quad (4.7)$$

Nótese que, para modelos de GM y el modelo  $\Lambda$ CDM,  $\omega_a = 0$  y  $\omega = -1$ . Finalmente, al hacer el cambio,  $G = D/a$ , se obtiene:

$$G'' + \left[ \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega(a)}{1 + X(a)} \right] \frac{G'}{a} + \frac{3}{2} \frac{1 - \omega(a)}{1 + X(a)} \frac{G}{a} = 0. \quad (4.8)$$

A través de la ecuación de Poisson (3.48),  $G$ , está relacionada con el potencial gravitacional y el campo de velocidades peculiares [58]. Por lo tanto,  $D = G \cdot a$  y  $f = (a/D) \cdot (dD/da) = 1 + (G' \cdot a/G)$ . La evolución de las funciones se representan en la figura (4.3). Aquí se han elegido los mismos parámetros que en el cuadro (4.1). Al evolucionar el tiempo ( $z$  disminuye)  $D(z)$  aumenta y se forma la estructura y  $f(z)$  decrece. Hoy en día la función de crecimiento decrece porque las perturbaciones  $D(z)$  están dejando de crecer. Cuando empieza a dominar la energía oscura la expansión es muy rápida y hace que las perturbaciones dejen de crecer.

Con los datos que se han obtenido de la función de crecimiento dados por CosmoSIS, se obtiene el mejor ajuste para el valor de  $\gamma$  a partir de la ecuación (4.1), ver figura (4.4).

El valor obtenido por el ajuste es  $\gamma = 0.550494 \pm 0.0001373$ , con un error del 0.02494%. Que corresponde justo a  $\Lambda$ CDM.

Hasta ahora, sólo se ha hablado del modelo  $\Lambda$ CDM, pero se pretende abordar el modelo BZ de GM ya mencionado anteriormente, en el cual, se deberán ajustar los parámetros adecuados para dicho modelo.

La asignación de los valores para la parametrización (3.55) y (3.56) se ha realizado siguiendo el artículo [88], de modo que,  $\beta_1 = \frac{4}{3}$ ,  $\lambda_1^2 = 750 \text{ Mpc}^2$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2^2 = 1000 \text{ Mpc}^2$ . Se debe recordar que, cuando  $s = 4$ , el modelo se aproxima a RG. Entonces, la ecuación (4.2) estará dada por:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2} H^2 \Omega_m \left[ \frac{1 + (1000 \text{ Mpc}^2)k^2 a^s}{1 + (750 \text{ Mpc}^2)k^2 a^s} \right] \delta = 0. \quad (4.9)$$

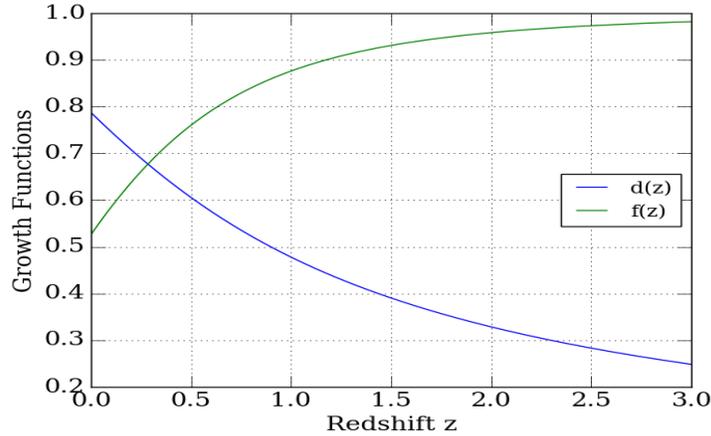


Figura 4.3: Evolución del factor de crecimiento y la función de crecimiento, donde  $d(z) = D(z)$ . Se observa que, actualmente, la función de crecimiento disminuye, y es debido a que las perturbaciones están dejando de crecer.  $D(z)$  aumenta, pero conforme pase el tiempo, ya no la hará pues el universo se sigue expandiendo y evitará el crecimiento de  $D(z)$ .

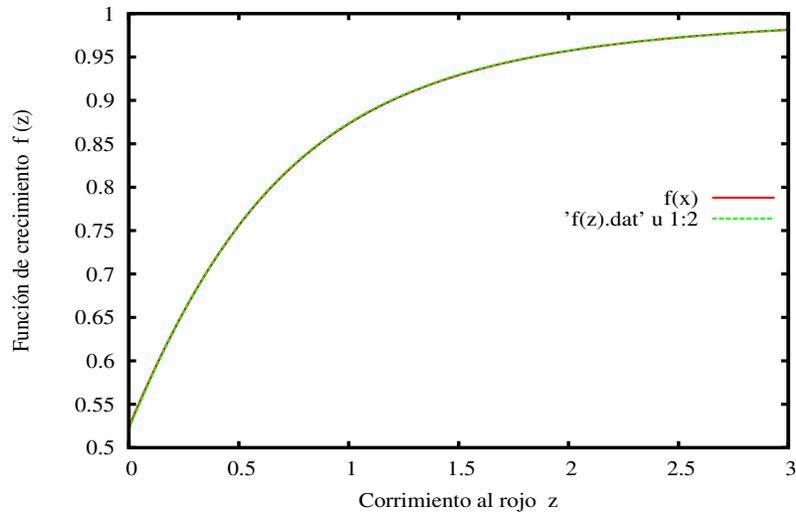


Figura 4.4: Datos obtenidos por CosmoSIS para la función de crecimiento (puntos verdes) y el mejor ajuste a la curva (línea roja), en la gráfica  $f(x)$  corresponde a  $f(z)$ . La línea roja va justamente sobre la línea verde pues el ajuste es muy preciso. Gráfica obtenida con gnuplot, emplea el método de mínimos cuadrados para obtener el mejor ajuste.

El lector debe darse cuenta de que la ecuación (4.9) ahora depende del número de onda  $k$ , es decir, para cada valor de  $k$  existe una función de crecimiento diferente, cosa que no sucede en la cosmología de  $\Lambda$ CDM. Además, también para cada valor de  $s$  existe una función de crecimiento  $f(k, z)$  diferente. De igual manera, para cada  $s$  existe un espectro de potencias diferente. Cada punto en la curva del espectro de potencias corresponde a una función de crecimiento diferente.

La manera en como se obtendrá la función de crecimiento para este modelo de GM, es a través de la función  $\mu(a, k)$  en la ecuación de Poisson para obtener la ecuación (4.2) y después, aplicando el mismo procedimiento para obtener la ecuación (4.8), se llega a la ecuación efectiva para PPF,

$$G'' + \left[ \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega(a)}{1 + X(a)} \right] \frac{G'}{a} + \frac{3}{2} \left[ \frac{1 - \omega(a) + X(a)[1 - \mu(a, k)]}{1 + X(a)} \right] \frac{G}{a} = 0, \quad (4.10)$$

donde, para  $\mu = 1$ , se recupera  $\Lambda$ CDM, de igual manera se recupera cuando  $k = 0$ . La ecuación (4.10) no viene por defecto en CosmoSIS, así que, lo que se hizo fue modificar en el código que utiliza el (*demo8.ini*) de CosmoSIS, donde se resuelve dicha ecuación. Y para obtener el espectro de potencias de materia se utilizará *MG-CAMB*, de 2012 [48, 88], el cual viene incorporado en CosmoSIS.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para los distintos valores de  $s$  en la ecuación (4.10). Se pretenden obtener los diferentes espectros de potencias tanto de materia como de radiación, para identificar las desviaciones con respecto al modelo  $\Lambda$ CDM y, finalmente, ver que modelo se ajusta mejor a los datos obtenidos por BOSS en DR12 publicados en 2016 [40, 41, 42].

## 4.2. Modelo 1

Para el primer modelo, se considera  $s = 1$ . Al hacer el ajuste de los parámetros cosmológicos para este modelo se obtiene el espectro de potencias en el régimen lineal, ver figura (4.5), y el ajuste se muestra en la tabla (4.2).

$\Omega_m$	$\Omega_{mo}$	$\Omega_b$	$\Omega_\Lambda$	$h_0$	$n_s$	$\tau$	$\sigma_8$
0.3103	0.2622	0.048	0.6896	0.6774	0.96	0.066	1.2598

Cuadro 4.2: Valores obtenidos del mejor ajuste para los parámetros cosmológicos del modelo BZ con  $s = 1$ , dados por CosmoSIS. Los valores son los usados para obtener ambos espectros de potencias.

Se observa que, el cuadro (4.2) es parecido al (4.1) excepto que en el cuadro (4.2) el valor de  $\Omega_m$  es un poco mayor, pero sobre todo el valor de  $\sigma_8$  que es la amplitud del *rms* de las perturbaciones en 8 Mpc, hoy en día. Es decir, el modelo de GM genera más colapso que  $\Lambda$ CDM.

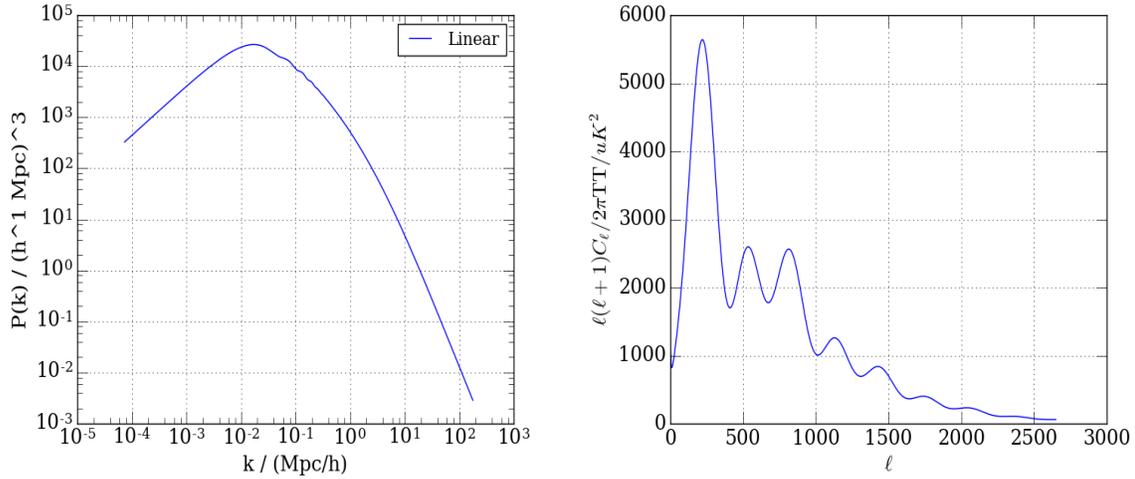


Figura 4.5: Espectros. A la izquierda se muestra el espectro de potencias de materia en el régimen lineal. A la derecha se observa el espectro de potencias para la radiación, el cual, sólo depende del valor de los parámetros cosmológicos del cuadro (4.2). Se obtuvieron a partir de ejecutar *mgcamb.ini* de CosmoSIS.

Aparentemente, este espectro de potencias de materia decae menos rápido que para  $\Lambda$ CDM a partir del régimen no lineal. Pero lo que interesa es que los modelos sean similares dentro del régimen lineal, puesto que, la parte no-lineal no está bien calculada por CosmoSIS. Más adelante se hará la comparación directa con todos los

modelos.

CosmoSIS obtiene la función de crecimiento  $f = f(k, z)$  resolviendo la ecuación (4.10) con  $s = 1$ , la cual se muestra en la figura (4.6) para diferentes valores de  $k$ .

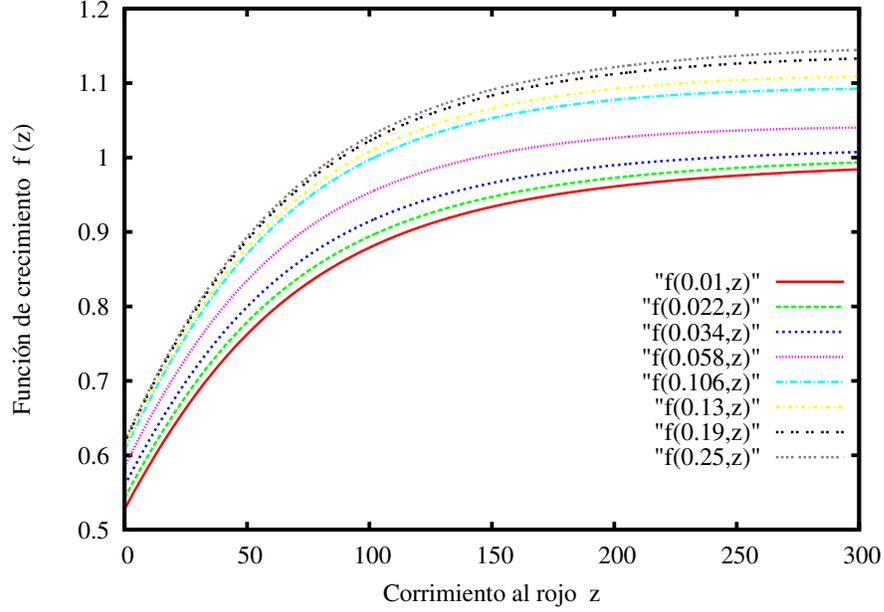


Figura 4.6: Evolución de la función de crecimiento para diferentes valores de  $k$ . Donde a partir de  $k = 0.034$  todas las demás gráficas sobrepasan el valor de 1 para la función de crecimiento. En realidad no hay ninguna restricción para la cual la función de crecimiento tenga que estar por debajo de 1. El que su valor se mayor, sólo indica que para esas escalas, el crecimiento de las perturbaciones  $\delta$  son pequeñas. Esto no sucedía en el modelo  $\Lambda$ CDM, dado que, el crecimiento de las perturbaciones es igual para todas las escalas.

Los resultados muestran que, para valores pequeños de  $k$ , las desviaciones con respecto a  $\Lambda$ CDM no son muy grandes. Si se quisiera estudiar la parte no-lineal, se tendrían que implementar las perturbaciones a segundo orden ó mayores.

Se pretenden obtener los valores del índice de crecimiento para las diferentes funciones de crecimiento dependientes de  $k$ . Como  $f(z) = \Omega_m^\gamma(z)$ , ver ecuación (4.1), pero para nosotros  $f = f(k, z)$ , entonces, se debe encontrar una ecuación similar. Así que, se propone la siguiente función de crecimiento;

$$f(k, z) = \left(\frac{k}{k_0}\right)^\alpha + \Omega_m^\gamma(z) = \left(\frac{k}{k_0}\right)^\alpha + \left[ \frac{(1+z)^3}{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0}} \right]^\gamma, \quad (4.11)$$

A este nuevo parámetro  $\alpha$  se le llamará *índice de crecimiento espacial*. Mientras que, se hará referencia a  $\gamma$  como el *índice de crecimiento temporal*. Donde  $k_0$  es la escala de pivote del espectro de potencias y su valor será tomado como 1. Se tiene que,

para  $k = 0$  se recupera la función de crecimiento dada por el modelo  $\Lambda$ CDM y para valores pequeños de  $k$  se espera que  $\alpha \approx 1$  y no contribuya mucho a  $f(z)$ . Con los datos obtenidos por CosmoSIS para la función de crecimiento, los ajuste de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  se observan en el cuadro (4.3).

En la figura (A.1) se muestran las gráficas de los ajustes correspondientes al cuadro (4.3). En todos los casos, los ajustes son mejores que el 0.4 %, lo que implica un grado de incertidumbre adecuado para comparar con los datos actuales o incluso con *DESI* (por sus siglas en inglés, Dark Energy Spectroscopic Instrument).

$f(k, z)$	$\gamma$	Error porcentual	$\alpha$	Error porcentual
$f(0.01, z)$	$0.547614 \pm 0.0002802$	0.05117 %	$1.22055 \pm 0.004284$	0.351 %
$f(0.034, z)$	$0.528023 \pm 0.001281$	0.2426 %	$1.02748 \pm 0.003156$	0.3071 %
$f(0.106, z)$	$0.58781 \pm 0.002384$	0.4055 %	$0.933117 \pm 0.002137$	0.2291 %
$f(0.25, z)$	$0.658728 \pm 0.00167$	0.2536 %	$1.26704 \pm 0.001652$	0.1303 %
$f(0.310817, z)$	$0.668269 \pm 0.001541$	0.2306 %	$1.47522 \pm 0.001739$	0.1179 %

Cuadro 4.3: Valores de los índices de crecimiento para valores diferentes de  $k$ . El valor de  $\gamma$  crece conforme crece el valr de  $k$ , excepto en  $k = 0.034 \frac{h}{Mpc}$  y valores cercanos a éste. Los valores de  $\alpha$  dependen de la escala en la que se este observando.

### 4.3. Modelo 2

El segundo modelo corresponde a  $s = 2$ . El ajuste de los parámetros cosmológicos se muestran en el cuadro (4.4), a partir de estos parámetros se obtienen los espectros de potencias de la figura (4.7).

$\Omega_m$	$\Omega_{mo}$	$\Omega_b$	$\Omega_\Lambda$	$h_0$	$n_s$	$\tau$	$\sigma_8$
0.3217	0.2732	0.0485	0.6782	0.6669	0.9777	0.066	0.9847

Cuadro 4.4: Valores obtenidos del mejor ajuste para los parámetros cosmológicos del modelo BZ con  $s = 2$ , dados por CosmoSIS. Los valores son los usados para obtener ambos espectros de potencias.

La función de crecimiento para diferentes valores de  $k$  se muestra en la figura (4.8). Como ya se mencionó, para  $k$  pequeñas se recupera el modelo  $\Lambda$ CDM que corresponde a la línea roja de la figura anterior. Para valores grandes de  $k$ , la función de crecimiento es mayor que la del modelo  $\Lambda$ CDM. Hacemos notar que en la medida que  $k$  crece nos acercamos a las escalas no-lineales.

Las figuras (4.6) y (4.8) son gráficas que se leen de derecha a izquierda (a medida que crece el tiempo cósmico) pues para valores grandes de  $z$ , se observa el Universo

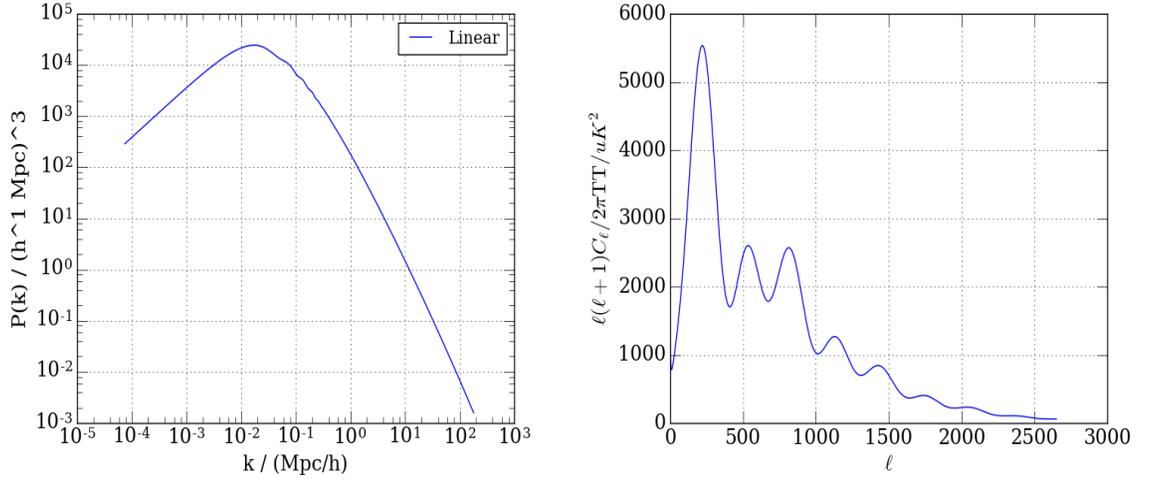


Figura 4.7: A la izquierda se muestra el espectro de potencias de materia en el régimen lineal. A la derecha se observa el espectro de potencias para la radiación. Se obtuvieron ejecutando `mgcamb.ini` de `CosmoSIS`.

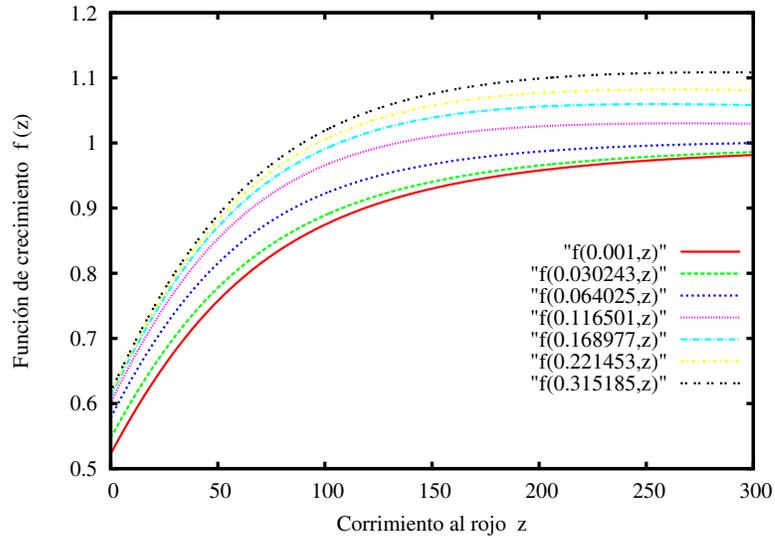


Figura 4.8: Evolución de la función de crecimiento para diferentes valores de  $k$ , donde a partir de  $k = 0.064025$  todas las demás gráficas sobrepasan el valor de 1 para la función de crecimiento, lo que significa que, el crecimiento de las sobredensidades son pequeñas.

en sus primeros años y para  $z = 0$ , se mira al Universo hoy en día. Para  $z$  negativos se obtienen valores futuros de la función de crecimiento. Sería interesante saber a que valor convergerían estas gráficas más allá de  $z = 0$ , es decir, los valores negativos de  $z$ . Probablemente sean iguales en algún punto, y después de éste, la evolución de las sobredensidades sería la misma para todas las regiones del Universo, al igual que en el modelo  $\Lambda$ CDM, es decir, sin dependencia de  $k$ .

En la cuadro (4.5) se muestran los ajustes para  $\alpha$  y  $\gamma$  correspondientes a algunos valores de  $k$ .

$f(k, z)$	$\gamma$	Error porcentual	$\alpha$	Error porcentual
$f(0.001, z)$	$0.552235 \pm 0.0001589$	0.02877 %	$1.0709 \pm 0.00955$	0.8918 %
$f(0.064025, z)$	$0.478478 \pm 0.002057$	0.43 %	$1.34096 \pm 0.007963$	0.5938 %
$f(0.116501, z)$	$0.487775 \pm 0.003677$	0.7538 %	$1.27699 \pm 0.007057$	0.5527 %
$f(0.168977, z)$	$0.522125 \pm 0.004032$	0.7721 %	$1.31586 \pm 0.006092$	0.463 %
$f(0.315185, z)$	$0.597194 \pm 0.003247$	0.5437 %	$1.67487 \pm 0.004791$	0.2861 %

Cuadro 4.5: Se muestran los valores de los índices de crecimiento para diferentes  $k$ . Ajustes determinados con *gnuplot*.

Los valores de  $\gamma$  y  $\alpha$  parece que no tienen relación monótona, es decir, de si llevan una tendencia creciente o decreciente. Se puede deber a que en esta zona se encuentra BAO.

En la figura (A.2) se muestran las gráficas de los ajustes de algunos valores correspondientes al cuadro (4.5).

## 4.4. Modelo 3

Para el tercer modelo,  $s = 3$ . De igual manera el valor de los parámetros cosmológicos se muestra en el cuadro (4.6), obteniendo así los espectros de potencias correspondientes, ver figura (4.9).

$\Omega_m$	$\Omega_{mo}$	$\Omega_b$	$\Omega_\Lambda$	$h_0$	$n_s$	$\tau$	$\sigma_8$
0.3212	0.2731	0.0480	0.6787	0.6654	0.9795	0.066	0.9142

Cuadro 4.6: Valores obtenidos del mejor ajuste para los parámetros cosmológicos del modelo BZ con  $s = 3$ , dados por *CosmoSIS*. Los valores son los usados para obtener ambos espectros de potencias.

La función de crecimiento para diferentes valores de  $k$  se muestra en la figura (4.10). En el cuadro (4.7) se muestran los valores de  $\gamma$  y  $\alpha$ . Para este modelo, los valores de  $\gamma$  al parecer siempre son menores que para  $\Lambda$ CDM, aunque en el último punto el valor va aumentando, lo cual supone que, para  $k$  más grande el valor de  $\gamma$  sea mayor que para  $\Lambda$ CDM. Dado que  $\gamma$  disminuye con respecto al valor de  $\Lambda$ CDM, el valor de  $\alpha$  aumenta, y se puede interpretar como si el crecimiento de las sobredensidades fuese menor que para el modelo  $\Lambda$ CDM. En la figura (A.3) se muestran los ajustes correspondientes al cuadro (4.7).

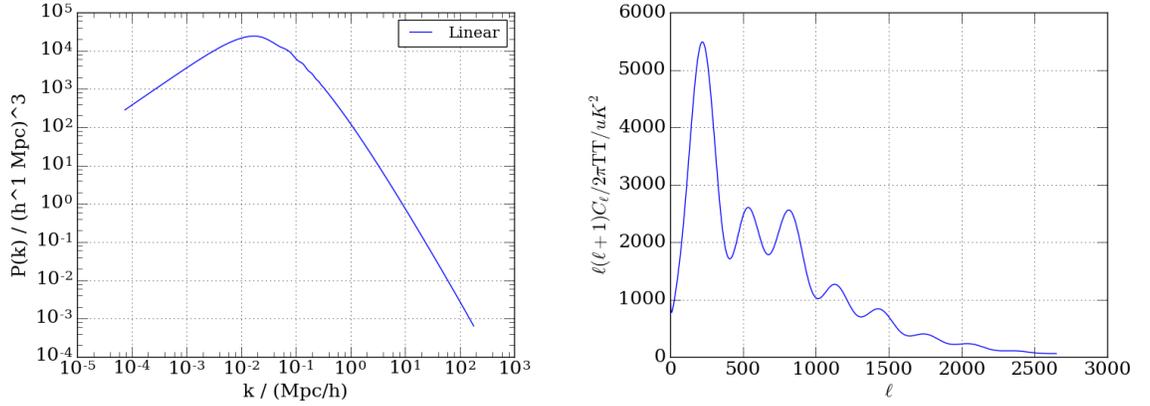


Figura 4.9: Espectros de potencias. A la izquierda se muestra el espectro de potencias de materia en el régimen lineal. A la derecha se observa el espectro de potencias para la radiación.

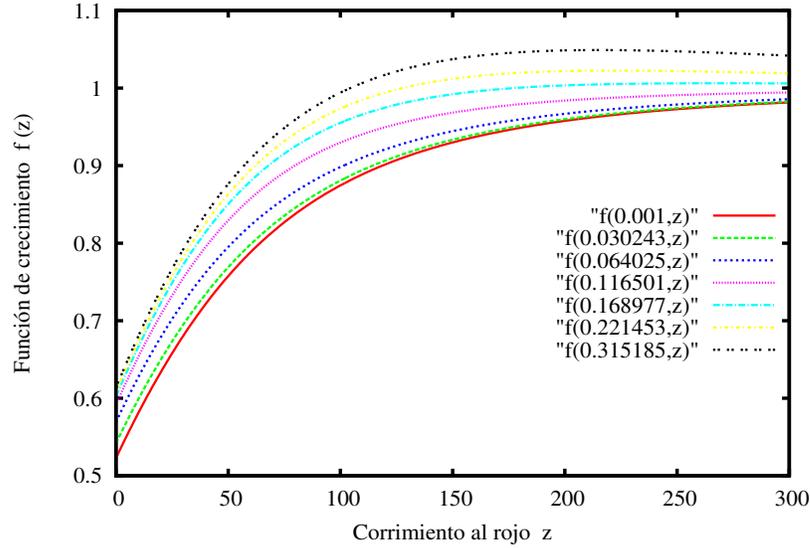


Figura 4.10: Evolución de la función de crecimiento para diferentes valores de  $k$ , donde a partir de  $k \approx 0.168977$  todas las demás gráficas sobrepasan el valor de 1 para la función de crecimiento. Gráfica obtenida con *gnuplot*.

$f(k, z)$	$\gamma$	Error porcentual	$\alpha$	Error porcentual
$f(0.001, z)$	$0.552249 \pm 0.0001583$	0.02867 %	$1.07225 \pm 0.009606$	0.8959 %
$f(0.064025, z)$	$0.4727022 \pm 0.0009049$	0.1914 %	$1.97313 \pm 0.02$	1.014 %
$f(0.116501, z)$	$0.439328 \pm 0.002814$	0.6405 %	$1.81148 \pm 0.01762$	0.9728 %
$f(0.168977, z)$	$0.44021 \pm 0.004197$	0.9535 %	$1.80943 \pm 0.01613$	0.8914 %
$f(0.315185, z)$	$0.488838 \pm 0.00535$	1.094 %	$2.11756 \pm 0.01415$	0.668 %

Cuadro 4.7: Se muestran los valores de los índices de crecimiento a diferentes  $k$ . Ajustes determinados con *gnuplot*.

## 4.5. Modelo 4

Para el cuarto y último modelo corresponde a  $s = 4$ , que en principio debería ser similar a  $\Lambda$ CDM [39, 88], pues a partir de la ecuación (3.55), el factor de escala, que es, a lo más, igual a 1, cualquier número menor que 1 elevado a una potencia de orden 4, tiende a cero. Si  $a^4 \rightarrow 0$ , para valores de  $a < 1$ , implica que  $\mu \rightarrow 1$ , y justo aquí se recupera el modelo  $\Lambda$ CDM. Los valores de los parámetros cosmológicos se muestran en la tabla (4.8) y los espectros de potencias se muestran en la figura (4.11).

$\Omega_m$	$\Omega_{mo}$	$\Omega_b$	$\Omega_\Lambda$	$h_0$	$n_s$	$\tau$	$\sigma_8$
0.3340	0.2849	0.0490	0.6659	0.6578	0.9754	0.066	0.9238

Cuadro 4.8: Valores obtenidos del mejor ajuste para los parámetros cosmológicos del modelo BZ con  $s = 4$ , dados por CosmoSIS. Los valores son los usados para obtener ambos espectros de potencias.

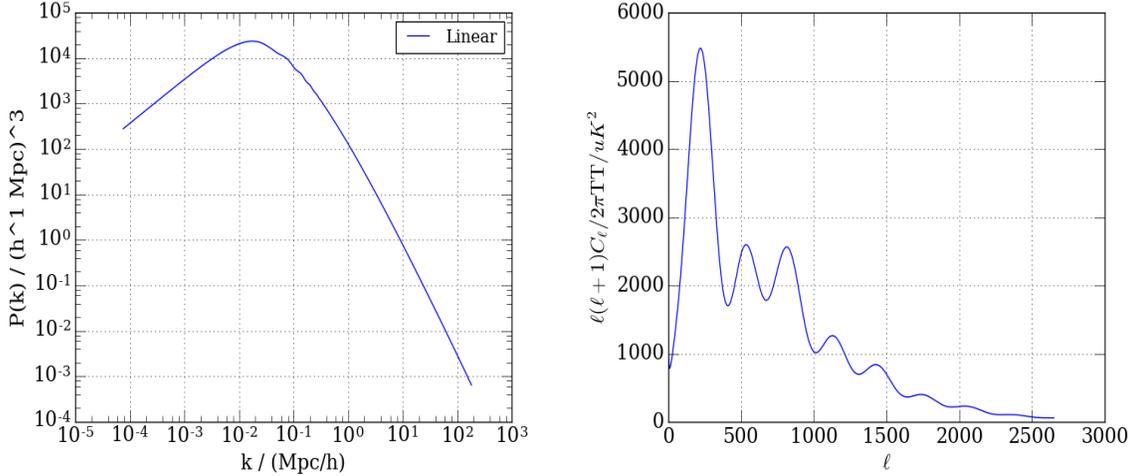


Figura 4.11: A la izquierda se muestra el espectro de potencias de materia en el régimen lineal. A la derecha se observa el espectro de potencias para la radiación. Aparentemente es similar a  $\Lambda$ CDM. Se obtuvieron ejecutando `mgcamb.ini` de CosmoSIS.

La función de crecimiento para diferentes valores de  $k$  se muestra en la figura (4.12). Para este modelo, el crecimiento de las sobredensidades es similar al predicho por el modelo  $\Lambda$ CDM para valores de  $z$  grandes, o valores de  $a$  pequeños. En el cuadro (4.9) se muestran los valores de  $\gamma$  y  $\alpha$ . Para este modelo, mientras el valor de  $\gamma$  decrece con el aumento de  $k$ , y el valor de  $\alpha$  crece, la razón es que siendo el modelo más próximo a  $\Lambda$ CDM la cantidad  $\frac{k}{k_0}^\alpha \rightarrow 0$ .

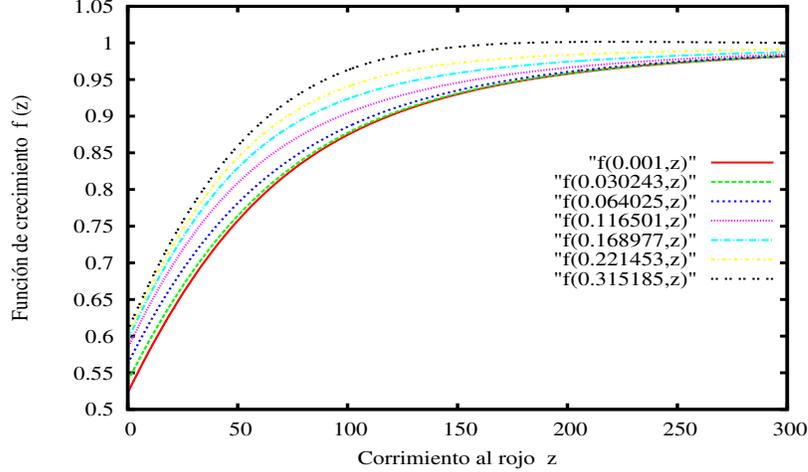


Figura 4.12: Evolución de la función de crecimiento para diferentes valores de  $k$ , donde al parecer ninguna sobrepasa el valor de 1. El resultado era de esperarse pues este modelo deber ajustarse mejor a  $\Lambda$ CDM según lo dicho al inicio de la sección.

$f(k, z)$	$\gamma$	Error porcentual	$\alpha$	Error porcentual
$f(0.001, z)$	$0.552261 \pm 0.0001581$	0.02863 %	$1.07249 \pm 0.009608$	0.8959 %
$f(0.116501, z)$	$0.43898 \pm 0.001326$	0.3021 %	$2.8832 \pm 0.08329$	2.889 %
$f(0.168977, z)$	$0.417799 \pm 0.002696$	0.6454 %	$2.58899 \pm 0.04211$	1.626 %
$f(0.315185, z)$	$0.417185 \pm 0.005214$	1.25 %	$2.8451 \pm 0.03355$	1.179 %

Cuadro 4.9: Se muestran los valores de los índices de crecimiento a diferentes  $k$ . Ajustes determinados con `gnuplot`.

En la figura (A.4) se muestran las gráficas de los ajustes correspondientes al cuadro (4.9).

## 4.6. Comparación de los Modelos

Se aprecia que en la zona de BAO, para el espectro de potencias de materia, las oscilaciones son más evidentes para  $s < 4$ . La línea negra en el espectro de potencias de materia, representa el límite en el que las perturbaciones lineales son validas. Después de este valor, es decir, para escalas más pequeñas, comienzan los efectos de las perturbaciones no lineales. El hecho de que el espectro de potencias de materia para cada modelo sea mayor, en amplitud, que el modelo  $\Lambda$ CDM, es por la cantidad de materia oscura que requiere cada modelo. Al observar el espectro de potencias de la radiación, el modelo más próximo al modelo  $\Lambda$ CDM es el Modelo 1, lo que es interesante, ya que según la ecuación (3.55), este Modelo 1 es el que más se desvía de  $\Lambda$ CDM. La figura (4.13) muestra la superposición de los espectros de potencias para estos modelos. La figura (4.14) muestra con mayor precisión las desviaciones de los modelos.

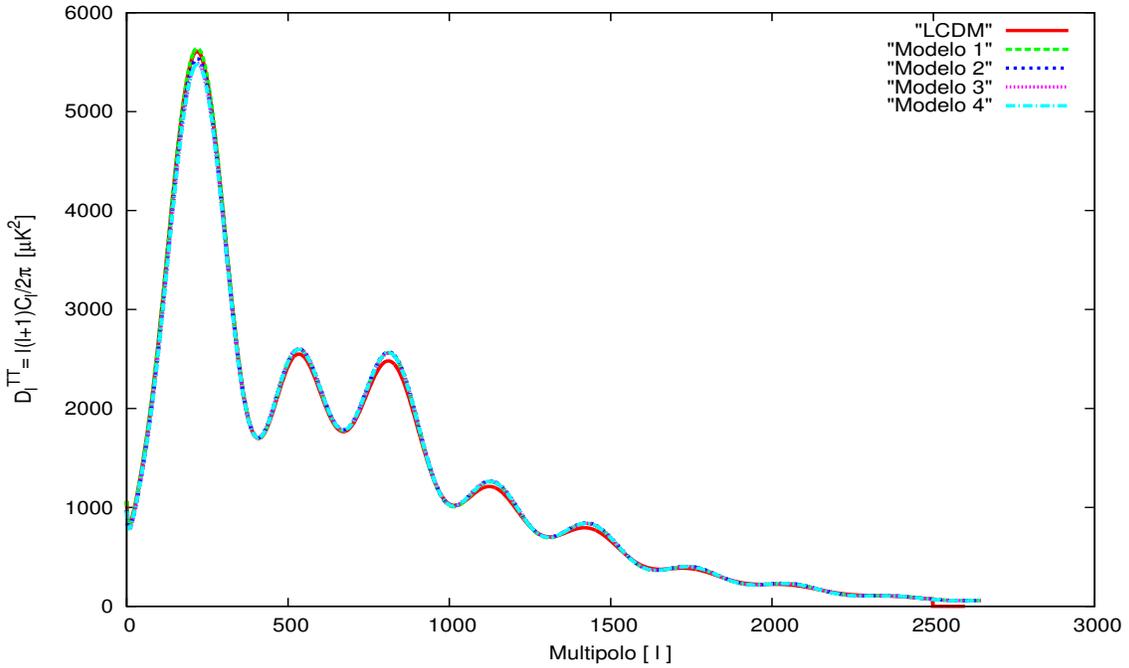
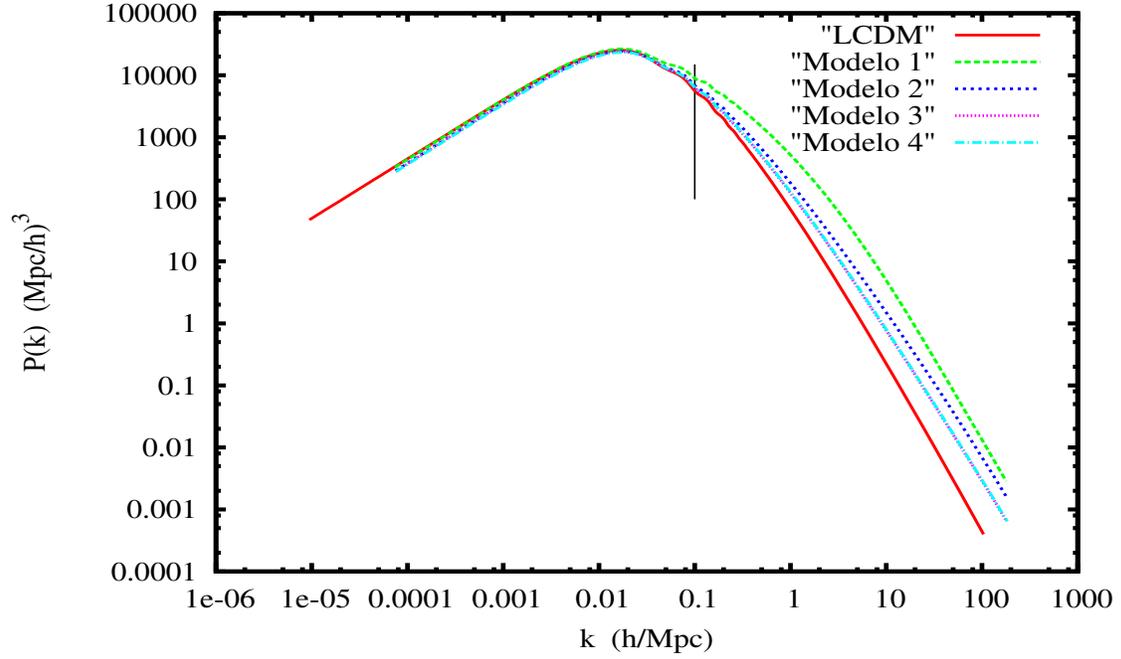


Figura 4.13: En la figura superior, se muestra el espectro de potencias de materia en el régimen lineal para los distintos valores de  $s$ . Los modelos 3 y 4 son muy similares entre ellos y, además, son los más próximos a  $\Lambda$ CDM en el régimen lineal. En la figura inferior, se observa el espectro de potencias para la radiación. Los modelos son similares entre ellos y además similares a  $\Lambda$ CDM, aunque hay diferencias apreciadas en la altura del primer pico y se debe a la cantidad de materia que hay para cada modelo.

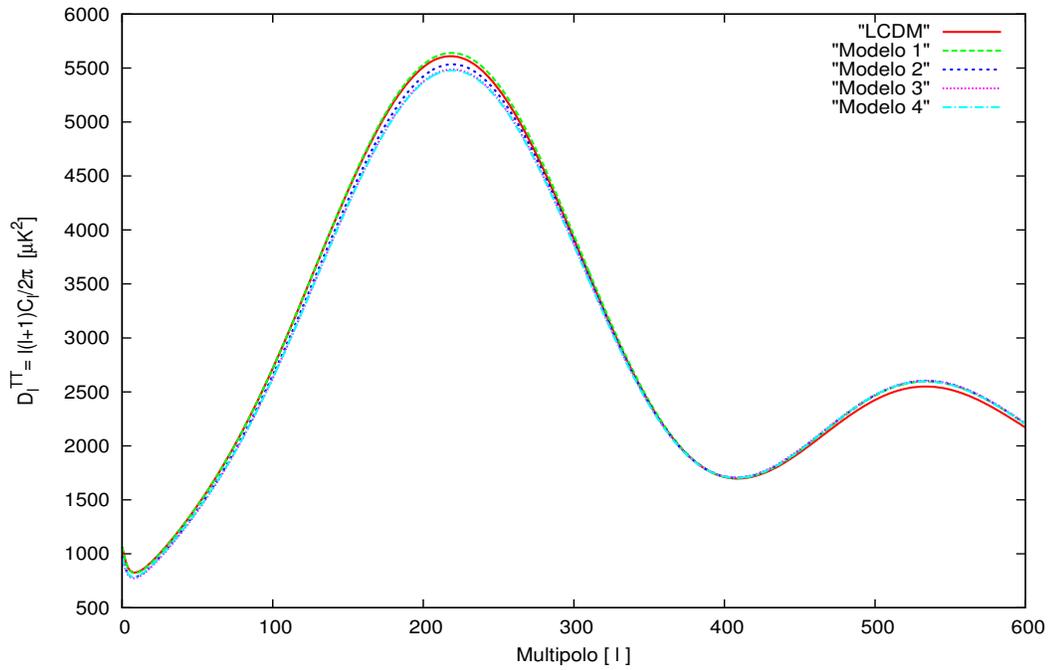
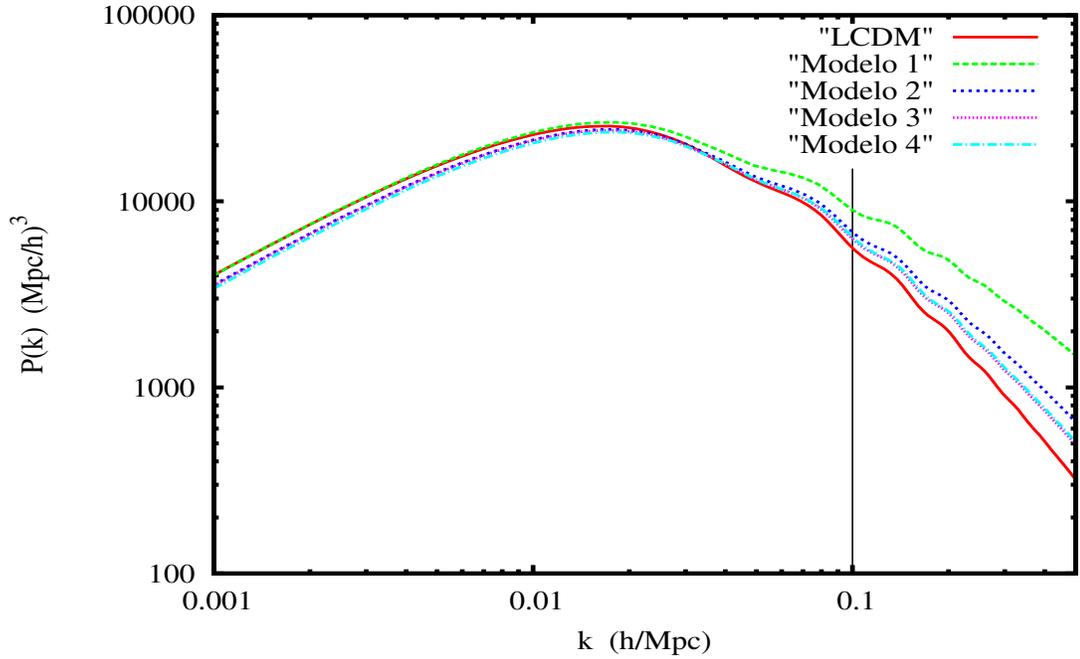


Figura 4.14: En el espectro de potencias de materia se observa que el modelo 1 es igual a  $\Lambda$ CDM para  $k < 0.004$  y los demás modelos van por debajo de  $\Lambda$ CDM pero después de  $k \approx 0.03$  estos modelos 2, 3 y 4 van por encima de éste. Los modelos 3 y 4 son prácticamente los mismos. Para el espectro de potencias de la radiación los modelos son consistentes con  $\Lambda$ CDM. Las desviaciones se observan en la altura del primer pico y esto se debe a la cantidad de materia que se obtuvo para cada modelo. El modelo más próximo al primer pico es el modelo 1.

En la figura (4.15) se muestra el comportamiento de la función de crecimiento en  $k = 0.116501$ , para los distintos modelos. Los modelos difieren en la función de crecimiento para un valor dado de  $k$ . En particular, se eligió ese valor de  $k$  para la figura (4.15), ya que si se hubiese elegido uno más pequeños como  $k = 0.01$  todos serían similares a  $\Lambda$ CDM. El hecho de que los modelos difieran, es debido a que, cada uno predice un crecimiento de las perturbaciones de forma diferente.

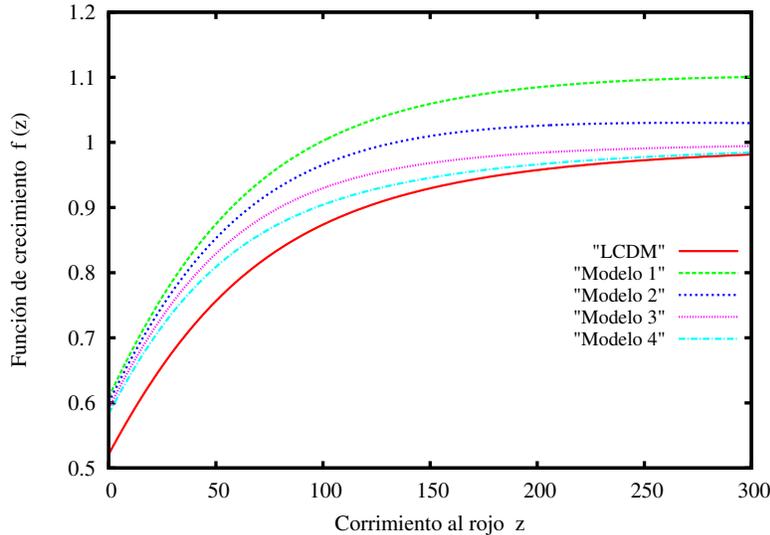


Figura 4.15: Evolución de la función de crecimiento para  $k = 0.116501$ . Como el modelo  $\Lambda$ CDM no depende de la escala, sólo se muestra una gráfica que describe la evolución de las sobredensidades en todo el Universo.

## 4.7. Incorporación de RSD

Por el momento, sólo se han mostrado los resultados para el espectro de potencias de la materia oscura sin los efectos de las distorsiones de corrimiento al rojo, causados por las galaxias. Para incorporar tal efecto, se deben usar las ecuaciones (2.62) y (2.64). Acorde con el artículo de A. J. S. Hamilton [45], donde en 1992 Hamilton propone la idea de descomponer la función de correlación en armónicos, dentro del espacio de corrimiento al rojo ( $s$ ). La conexión para el espectro de potencias fue clasificado por Cole, Fisher y Weinberg en 1994, donde se asume la aproximación plano-paralelo, mencionado anteriormente.

El espectro de potencias, en el espacio  $s$ , con la incorporación de las distorsiones al corrimiento al rojo, puede ser escrito como una suma de armónicos pares,  $P_l^s(\mathbf{k})$ , es decir,

$$P^2(\mathbf{k}) = \sum_{l \text{ pares}} \mathcal{P}_l(\mu_{\mathbf{k}}) P_l^s(\mathbf{k}), \quad P_l^s(k) \equiv \frac{(2l+1)}{4\pi} \int \mathcal{P}_l(\mu_{\mathbf{k}}) P^s(\mathbf{k}) d\omega_{\mathbf{k}}, \quad (4.12)$$

donde  $\mathcal{P}_l(\mu_{\mathbf{k}})$  son los polinomios de Legendre, y  $do_{\mathbf{k}}$  se refiere al intervalo de ángulo sólido en el espacio de Fourier. Los armónicos impares desaparecen por la simetría de intercambio de pares, y los armónicos azimutales no nulos desaparecen por simetría alrededor de la línea de visión. En el régimen lineal, la ecuación de Kaiser (2.62) muestra que el espectro de potencias en el espacio  $s$  se reduce a la suma de los armónicos monopolar ( $l = 0$ ), cuadrupolar ( $l = 2$ ) y hexadecapolar ( $l = 4$ ),

$$P^s(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_0(\mu_{\mathbf{k}})P_0^s(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_2(\mu_{\mathbf{k}})P_2^s(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_4(\mu_{\mathbf{k}})P_4^s(\mathbf{k}), \quad (4.13)$$

donde los armónicos  $P_l^s$  del espectro de potencias en el espacio  $s$  están relacionados con el espectro de potencias en el espacio real  $P(\mathbf{k})$  de la siguiente manera:

$$P_0^s(\mathbf{k}) = \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right) P(\mathbf{k}), \quad \textit{monopolo}, \quad (4.14)$$

$$P_2^s(\mathbf{k}) = \left(\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right) P(\mathbf{k}) \quad \textit{cuadrupolo}, \quad (4.15)$$

$$P_4^s(\mathbf{k}) = \frac{8}{35}\beta^2 P(\mathbf{k}), \quad \textit{hexadecapolo}. \quad (4.16)$$

donde  $\beta$  es el parámetro lineal de distorsión de corrimiento al rojo. Los polinomios de Legendre son:  $\mathcal{P}_0(\cos \theta) = 1$ ,  $\mathcal{P}_2(\cos \theta) = \frac{1}{4}(1 + 3 \cos 2\theta)$ ,  $\mathcal{P}_4(\cos \theta) = \frac{1}{64}(9 + 20 \cos 2\theta + 35 \cos 4\theta)$ . Recordar que se está tomando el espectro de potencias de galaxias. Si se usa la ecuación (2.64) donde se toma en cuenta el espectro de potencias de materia, la expansión multipolar es:

$$P_g^s(\mathbf{k}) = \left[ \left( b^2 + \frac{2}{3}bf + \frac{1}{5}f^2 \right) \mathcal{P}_0(\cos \theta) + \left( \frac{4}{3}bf + \frac{4}{7}f^2 \right) \mathcal{P}_2(\cos \theta) + \frac{8}{35}f^2 \mathcal{P}_4(\cos \theta) \right] P_{mo}(\mathbf{k}). \quad (4.17)$$

Nótese que el hexadecapolo no depende del bias. En la figura (4.16) se muestran los efectos de los multipolos para una perturbación esférica (línea delgada).

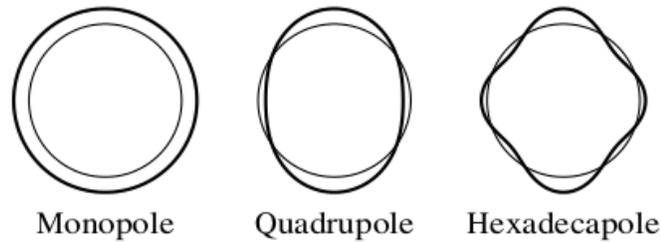


Figura 4.16: Formas de los armónicos monopolar ( $l = 0$ ), cuadrupolar ( $l = 2$ ) y hexadecapolar ( $l = 4$ ), son las líneas gruesas. Las deformaciones son vistas en el espacio de corrimiento al rojo. Tomado de [45].

Para este trabajo se tomará  $b = 1$  y  $\theta = 0$ , por lo tanto, la ecuación (4.17) resulta ser,

$$P_g^s(\mathbf{k}) = \left[ \left( 1 + \frac{2}{3}f + \frac{1}{5}f^2 \right) + \left( \frac{4}{3}f + \frac{4}{7}f^2 \right) + \frac{8}{35}f^2 \right] P_{mo}(\mathbf{k}). \quad (4.18)$$

También se comparará con algunos datos realizados por el telescopio SDSS III (Sloan Digital Sky Survey) [36], proyecto BOSS [30], que midieron los corrimientos al rojo espectroscópicos para más de 1 millón de galaxias y más de 200,000 cuásares. El catálogo de galaxias utilizó dos algoritmos primarios, seleccionando muestras llamadas LOWZ con 361,762 galaxias en los datos finales de DR12 [16] entre  $0.15 \leq z \leq 0.43$  y CMASS con 777,202 galaxias en DR12 entre  $0.43 \leq z \leq 0.70$  [41].

Para este trabajo se tomarán los datos de CMASS, con un valor efectivo para el corrimiento al rojo de 0.57 ( $z_{ef} = 0.57$ ), además se compara con los datos para el cuadrupolo únicamente. Así para el modelo  $\Lambda$ CDM se tendrá que elegir el espectro de potencias en  $z_{ef}$  y el valor de la función de crecimiento para el mismo  $z_{ef}$ , es decir,

$$P_g^s(\mathbf{k}, z_{ef}) = \left( \frac{4}{3}f(z_{ef}) + \frac{4}{7}f^2(z_{ef}) \right) P_{mo}(\mathbf{k}, z_{ef}). \quad (4.19)$$

Los resultados se muestran en en la figura (4.17), donde el término cuadrupolar toma el valor de 1.38 para  $f(z_{ef}) = 7.78 \times 10^{-1}$ .

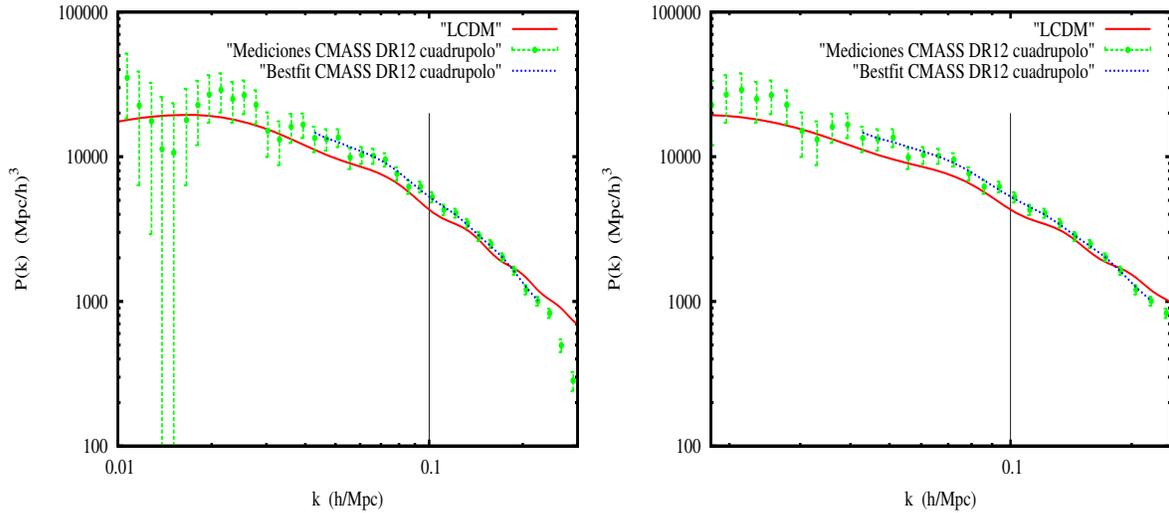


Figura 4.17: A la izquierda se muestran los datos de BOSS junto con el modelo  $\Lambda$ CDM. A la derecha se muestra la misma gráfica pero en un rango más pequeño para  $k$ . El modelo  $\Lambda$ CDM se aproxima muy bien a los datos en la parte lineal ( $k \leq 0.1$ ). Figura obtenida con gnuplot.

En la figura (4.17) se aprecia como el modelo  $\Lambda$ CDM se aproxima a los datos en la parte lineal, pero a partir de  $k \approx 0.18$  los datos tienen un descenso muy rápido que no concuerda con tal modelo. Pero esta parte pertenece al régimen no-lineal así que el modelo no permite afirmar nada y no es tema de estudio en este trabajo. Mientras que la parte lineal del modelo se aproxima bastante a los datos, porque el factor  $(1 + \beta\mu_k^2)^2$  (factor de Kaiser) es para una teoría lineal. Para la parte no-lineal

ese factor debería ser diferente.

Para el modelo de GM de BZ se tendrá que obtener la función de crecimiento para cada valor de  $k$  en  $z_{ef} = 0.57$  y obtener el factor de Kaiser para el cuadrupolo. Entonces, para los modelos de gravedad modificada ahora tenemos una dependencia en  $k$ :

$$P_g^s(\mathbf{k}, z_{ef}) = \left( \frac{4}{3}f(k, z_{ef}) + \frac{4}{7}f^2(k, z_{ef}) \right) P_{mo}(\mathbf{k}, z_{ef}). \quad (4.20)$$

La figura (4.18) muestra los resultados del Modelo 1.

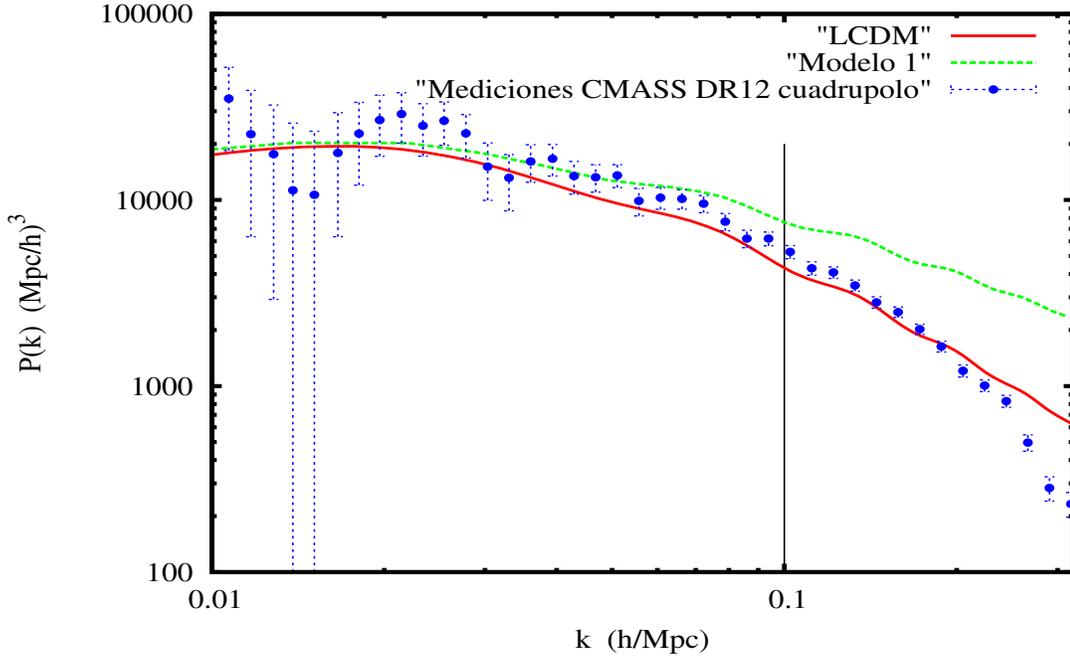


Figura 4.18: *Espectro de potencias de galaxias para el Modelo 1. Se observa que para  $k$  pequeños se recupera el modelo  $\Lambda$ CDM y para valores un poco más grandes, pero dentro del régimen lineal, el modelo con  $s = 1$  se ajusta un poco mejor a los datos hasta  $k \approx 0.07$ , después, tanto los datos como el modelo  $\Lambda$ CDM descienden.*

Se observa como la gráfica del Modelo 1 no decae como lo hace el modelo  $\Lambda$ CDM, y es porque la función de crecimiento para valores grandes de  $k$ ,  $f(k, z)$  es también grande, como lo muestra la figura (4.6). Como se menciono antes, el Modelo 1 debe describir la parte lineal, por lo tanto, el comportamiento que muestra en esta región, se apega más a los datos de CMASS que el Modelo  $\Lambda$ CDM, hasta que para  $k \approx 0.1$  el Modelo 1 se desvía más de los datos que el modelo  $\Lambda$ CDM. Para valores aún más grandes que 0.1 corresponden a la parte no-lineal y no será tomado en cuenta.

De igual manera, para obtener el espectro de potencias de galaxias en el Modelo 2, se tuvo que tomar la función de crecimiento para cada valor de  $k$ , en el mismo  $z_{ef}$ , obteniendo así el factor de Kaiser para el cuadrupolo, después, multiplicar este

factor de Kaiser por el espectro de potencias de materia oscura, en el espacio real, para su correspondiente valor de  $k$ . Se tomaron 34 puntos para  $k$ , en un rango de  $0.030243 \leq k \leq 0.315135$ , se tomó este rango porque para  $k \approx 0.03$ , o valores menores, el Modelo 2 tiende a ser idéntico a  $\Lambda$ CDM. Este mismo rango de valores es considerado para los siguientes modelos 3 y 4. Los resultados del Modelo 2 se muestran en la figura (4.19).

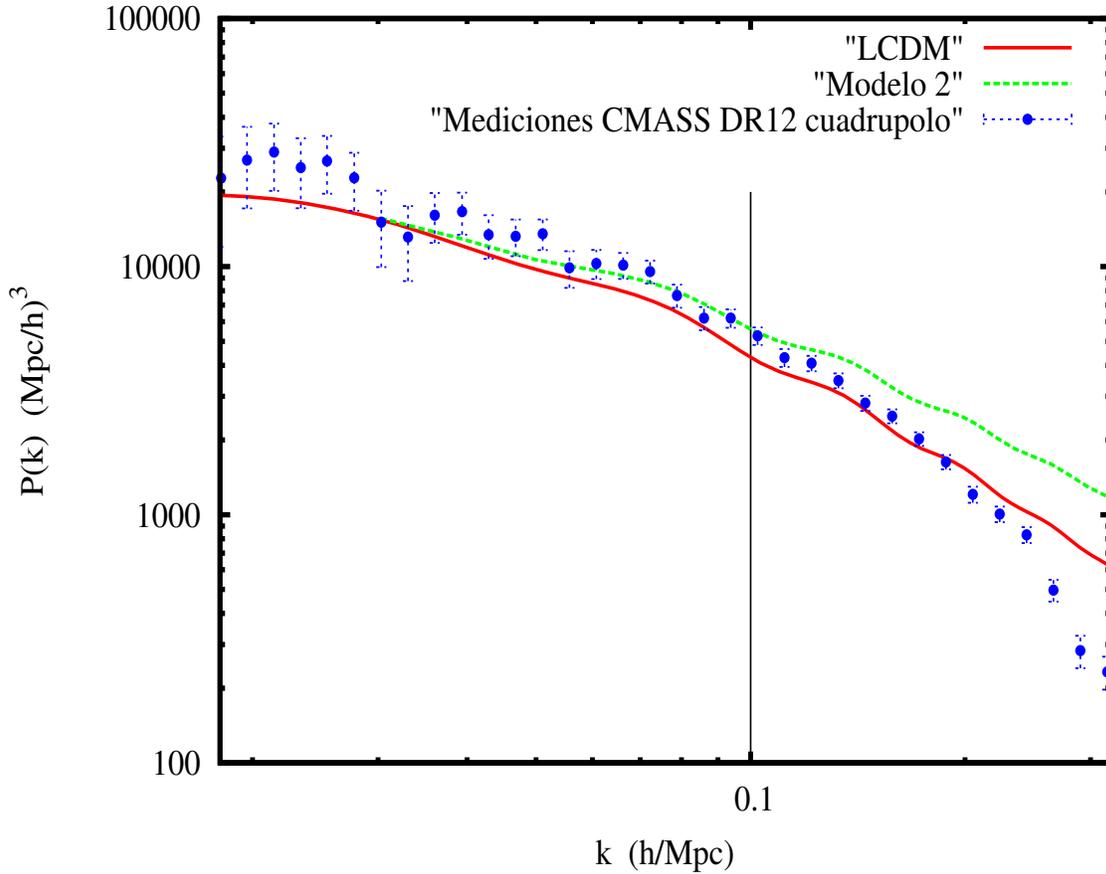


Figura 4.19: Espectro de potencias de galaxias para el Modelo 2. Se observa que para  $k$  pequeños se recupera el modelo  $\Lambda$ CDM, que lo que se esperaba, pues para estas escalas se tiene la cosmología de fondo. Este Modelo 2 se ajusta un mejor a los datos de CMASS que el modelo  $\Lambda$ CDM, dentro del régimen lineal. De igual manera que en los demás espectros de potencias, la línea negra representa el límite de validez de la teoría de perturbaciones lineales.

En el Modelo 3, se tiene que en  $k \approx 0.07$  y valores más pequeños, ambos modelos ( $\Lambda$ CDM y Modelo 3) son similares. El Modelo 3 se ajusta bien a los datos de CMASS, aún para rangos de  $k$  que pertenecen al régimen no-lineal, pero no se puede confiar en ellos, pues la teoría no ha sido desarrollada para explicar esos puntos. Los resultados se muestran en la figura (4.20).

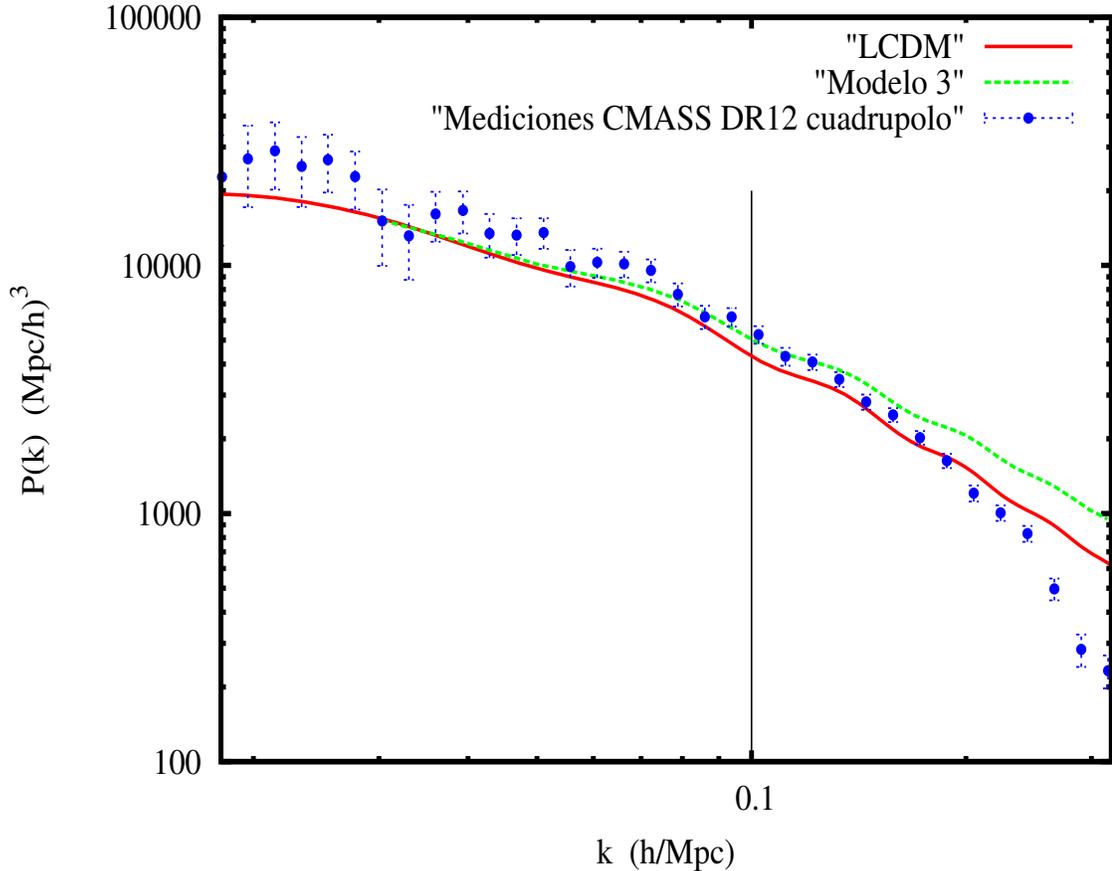


Figura 4.20: *Espectro de potencias del Modelo 3. Se observa que el Modelo 3 es muy similar al Modelo  $\Lambda$ CDM. Logra ajustarse mejor a los datos CMASS que el modelo  $\Lambda$ CDM, dentro del régimen lineal.*

Los resultados del Modelo 4 se muestran en la figura (4.21). Como ya se había visto, el Modelo 3 y 4 son casi idénticos, ver figura (4.14). Más adelante se verá que en los efectos de RSD su similitud también se preserva.

El Modelo 4, efectivamente, se aproxima bastante al Modelo  $\Lambda$ CDM dentro del régimen lineal. La diferencia que se muestra es debido a que; el Modelo  $\Lambda$ CDM tiene valores fijos para una sola función de crecimiento, ya que ésta no depende de la escala  $k$ . El Modelo 4 si depende de la escala  $k$ , dando lugar a valores diferentes, y cada vez más grandes, conforme  $k$  crece, para las funciones de crecimiento en el mismo  $z_{ef}$ .

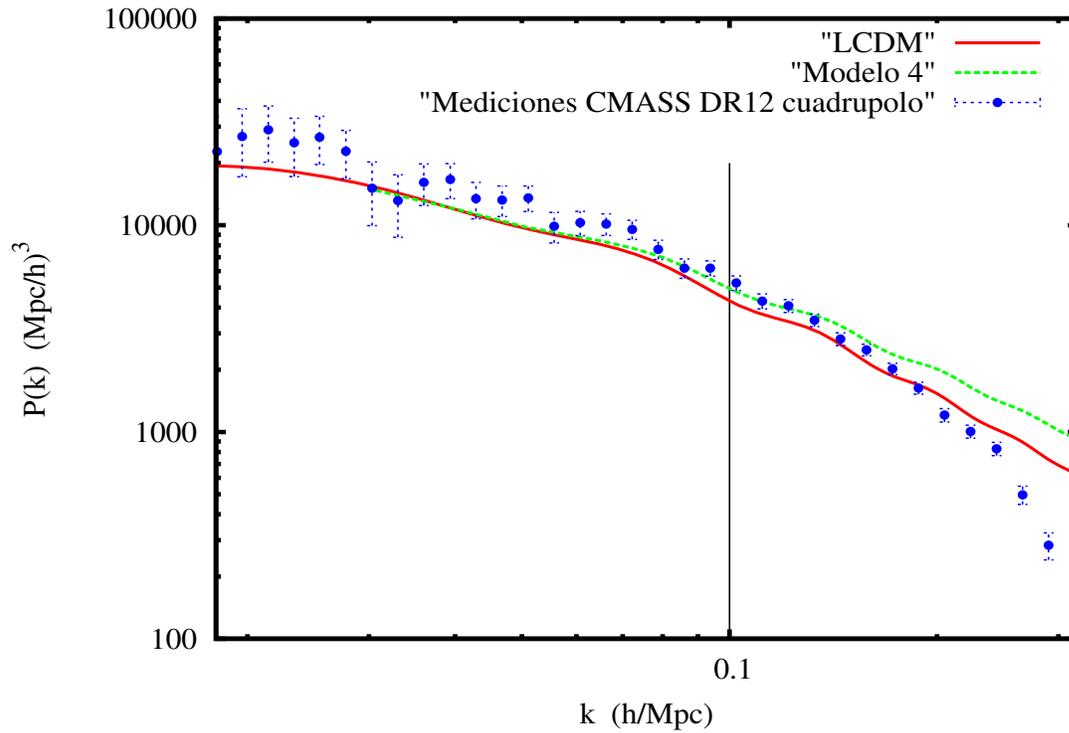


Figura 4.21: *Espectro de potencias de galaxias para el Modelo 4. Se observa que el Modelo 4 es muy similar al Modelo  $\Lambda$ CDM. Logra ajustarse mejor a los datos de CMASS que el modelo  $\Lambda$ CDM, dentro del régimen lineal. El hecho de que sean parecidos significa que, ambos modelos predicen una formación de estructura de manera similar, aun cuando, básicamente, la teoría de perturbaciones bajo la que están cimentadas son diferentes.*

En la figura (4.22) se muestra una comparación de todos los modelos y de los datos obtenidos por BOSS. Aquí se puede ver que los Modelos 3 y 4, en los efectos de RSD, preservan su similitud y ambos son los más próximos a el Modelo  $\Lambda$ CDM.

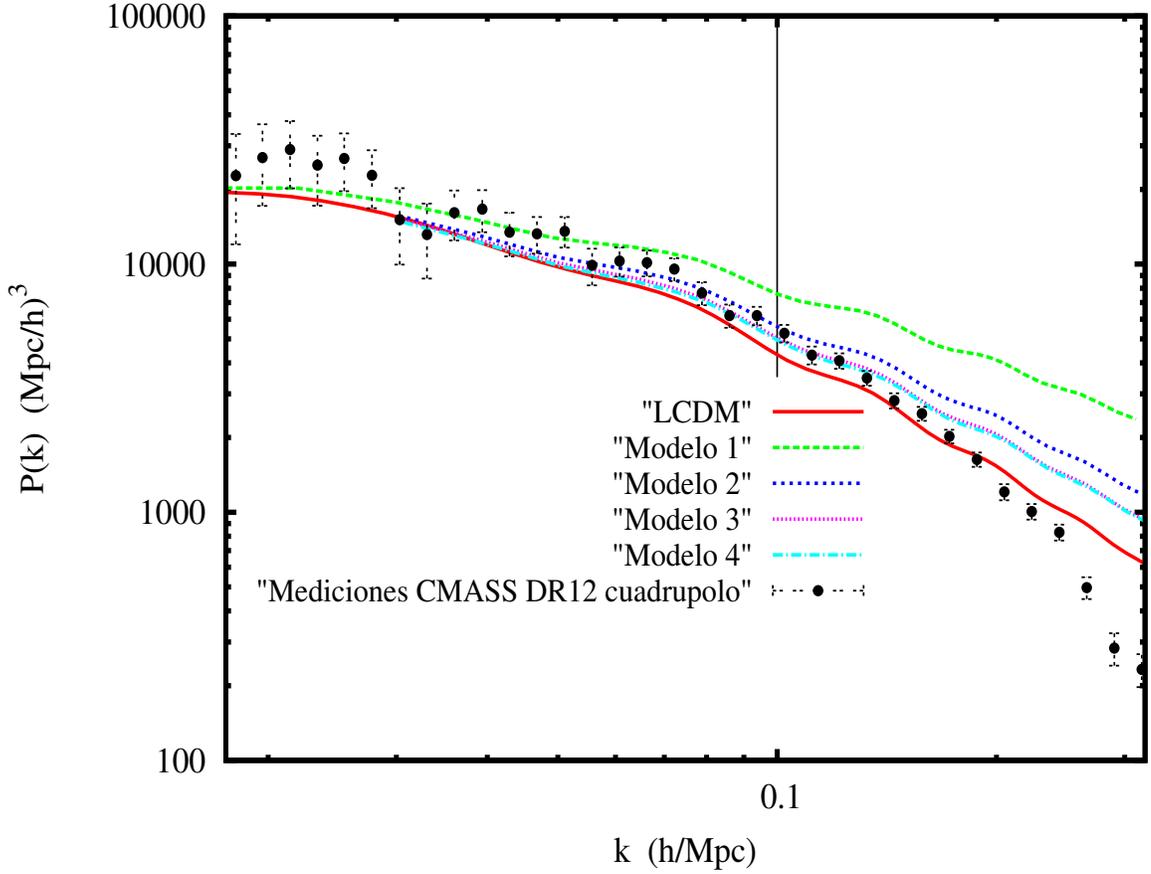


Figura 4.22: Espectros de potencias de galaxias. Se aprecia como todos los modelos se ajustan a los datos de CMASS dentro del régimen lineal, salvo por el Modelo 1 que antes del límite del régimen lineal comienza a desviarse mucho.

El Modelo que se ajusta mejor a los datos es el Modelo 2, pero sólo dentro del régimen lineal, donde de hecho es válido. En el cuadro (4.10) se muestran los valores de los parámetros cosmológicos para todos los modelos.

Modelos	$\Omega_m$	$\Omega_{mo}$	$\Omega_b$	$\Omega_\Lambda$	$h_0$	$n_s$	$\tau$	$\sigma_8$
$\Lambda$ CDM	0.3089	0.2609	0.048	0.6911	0.6774	0.96	0.066	0.8235
Modelo 1	0.3103	0.2622	0.048	0.6896	0.6774	0.96	0.066	1.2598
Modelo 2	0.3217	0.2732	0.0485	0.6782	0.6669	0.9777	0.066	0.9847
Modelo 3	0.3212	0.2731	0.048	0.6787	0.6654	0.9795	0.066	0.9142
Modelo 4	0.3340	0.2849	0.049	0.6659	0.6578	0.9754	0.066	0.9238

Cuadro 4.10: Parámetros cosmológicos. Se observa que la cantidad de materia total siempre es mayor que para el  $\Lambda$ CDM, la tasa de crecimiento va disminuyendo y el colapso gravitacional es más grande para el modelo BZ, donde es más evidente para  $s = 1$ .

En todos los casos, el colapso gravitacional es mayor que para el modelo  $\Lambda$ CDM, esto se aprecia justamente con el parámetro  $\sigma_8$ . El parámetro  $\Omega_m$ , de igual manera,

es mayor que para el modelo  $\Lambda$ CDM. Es curioso notar que, la tasa de expansión,  $h_0$ , disminuye conforme  $s$  aumenta. El valor del índice espectral  $n_s$  siempre es mayor o igual en el modelo de GM que en el modelo  $\Lambda$ CDM, lo cual quiere decir, que el modelo de GM predice con mayor precisión una invariancia de escala para las fluctuaciones, es decir, que tiende a un modelo de espectro inicial de Harrison-Zeldovich [68].

# Conclusiones

En el presente trabajo interesaba estudiar los efectos de las distorsiones al corrimiento al rojo que pudiesen apreciarse en el espectro de potencias de materia y el espectro de potencias de galaxias, para el Modelo Estándar de Cosmología y para un modelo típico de gravedad modificada como el modelo de Bertschinger y Zukin. Ésto lo llevamos a cabo dentro de la teoría de perturbaciones de la formación de estructura del Universo, en el régimen lineal.

En general, se obtuvo que los efectos de las distorsiones al corrimiento al rojo hacen que el espectro de potencias de galaxias sea mayor que en el caso cuando no son considerados, para cualquier  $z$ . El modelo  $\Lambda$ CDM predice que la formación de estructura en el Universo no depende de la escala en la cual sucede, es decir, la correlación que existe en el espacio para la formación de estructura es la misma en todo lugar y en cualquier dirección, lo que es razonable debido al principio cosmológico. Para el modelo de gravedad modificada se encontró que, el crecimiento de estructura sí depende de la escala en la cual se esté formando, pero ésto no quiere decir que las regiones en el espacio no estaban ó están correlacionadas, sino que, simplemente la formación de estructura es diferente para las distintas escalas. Y ésto no contradice el principio cosmológico, ya que, recuérdese que el principio cosmológico se ha tomado para un Universo estadísticamente homogéneo e isotrópico. Además las desviaciones con respecto al modelo estándar no son muy grandes, lo que implica que el modelo BZ no es inconsistente.

Se obtuvo el espectro de potencias de galaxias en el espacio  $s$ , con un corrimiento al rojo de  $z = 0.57$ , para el modelo  $\Lambda$ CDM y el modelo BZ, usando el software CosmoSIS. En modelo  $\Lambda$ CDM se obtuvo una sola función de crecimiento (pues no depende de la escala), y a partir de ésta se obtuvieron los efectos de RSD en el espectro de potencias de galaxias. En el modelo BZ se obtuvo el espectro de potencias para valores de  $s = 1$ ,  $s = 2$ ,  $s = 3$  y  $s = 4$ , donde cada uno describe una dinámica diferente. En cada valor de  $s$  se obtuvieron las funciones de crecimiento para  $0.001 \leq k \leq 0.31$ , donde se tomaron alrededor de 34 puntos diferentes. Usando CosmoSIS se hizo el mejor ajuste de los parámetros cosmológicos en cada modelo, a partir de los datos medidos por Planck en 2015. También se obtuvo el mejor ajuste del índice de crecimiento para el modelo  $\Lambda$ CDM, usando gnuplot a partir de los datos obtenidos por CosmoSIS, dando un valor de  $\gamma = 0.550494 \pm 0.0001373$ . Para el modelo BZ se propuso una función de crecimiento en términos de la escala  $k$  y del parámetro de densidad de materia  $\Omega_m$ , y a partir de esta función se obtuvo el índice

de crecimiento espacial  $\alpha$  y el índice de crecimiento temporal  $\gamma$ . De igual manera se obtuvo el mejor ajuste para estos índices de crecimiento a partir de los datos de CosmoSIS para algunos valores de  $k$ , los resultados se observan en los cuadros (4.3), (4.5), (4.7) y (4.9).

Finalmente se hizo la comparación de los modelos estudiados con los datos realizados por BOSS en los DR12 de CMASS. Para la parte lineal los modelos se ajustan bien a los datos, en la zona de BAO es cuando se muestran las diferencias entre los modelos, aún en la parte lineal. Se concluye que el modelo que mejor se ajusta a los datos, en la parte lineal, es el modelo BZ con  $s = 2$ .

Una recomendación para trabajos posteriores sería realizar los cálculos estadísticos de las desviaciones de los modelos estudiados y los datos obtenidos por BOSS, para tener una descripción cuantitativa de sus discrepancias, y no una cualitativa como lo que se hizo en este trabajo.

# Apéndice A

## Ajustes de la función de crecimiento $f(k,z)$

Las gráficas (A.1), (A.2), (A.3) y (A.4) se obtuvieron utilizando el programa gnuplot, que emplea el método de mínimos cuadrados para obtener el ajuste.

Se tuvo que introducir, en gnuplot, la función de crecimiento,

$$f(k, z) = \left(\frac{k}{k_0}\right)^\alpha + \Omega_m^\gamma(z) = \left(\frac{k}{k_0}\right)^\alpha + \left[ \frac{(1+z)^3}{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0}} \right]^\gamma, \quad (\text{A.1})$$

en donde los valores para el parámetro de materia ( $\Omega_m$ ) y energía oscura ( $\Omega_\Lambda$ ), se obtienen a partir de la tabla (4.10), para cada modelo, respectivamente. Gnuplot calculó los valores de  $\alpha$  y  $\gamma$  de la función de crecimiento (A.1) que se ajustan mejor a los datos, dados por CosmoSIS. Y finalmente, se obtiene la gráfica de los datos de CosmoSIS para la función de crecimiento y del ajuste que obtiene gnuplot para esta función de crecimiento, que son justo las gráficas que se muestran en este apéndice.

En las gráficas,  $f(x)$  corresponde a  $f(k, z)$  dada por la ecuación (A.1) para cada valor de  $k$  (líneas rojas), y los datos obtenidos por CosmoSIS se muestran en las gráficas como,  $f(z).dat$  (líneas verdes).

# Modelo 1

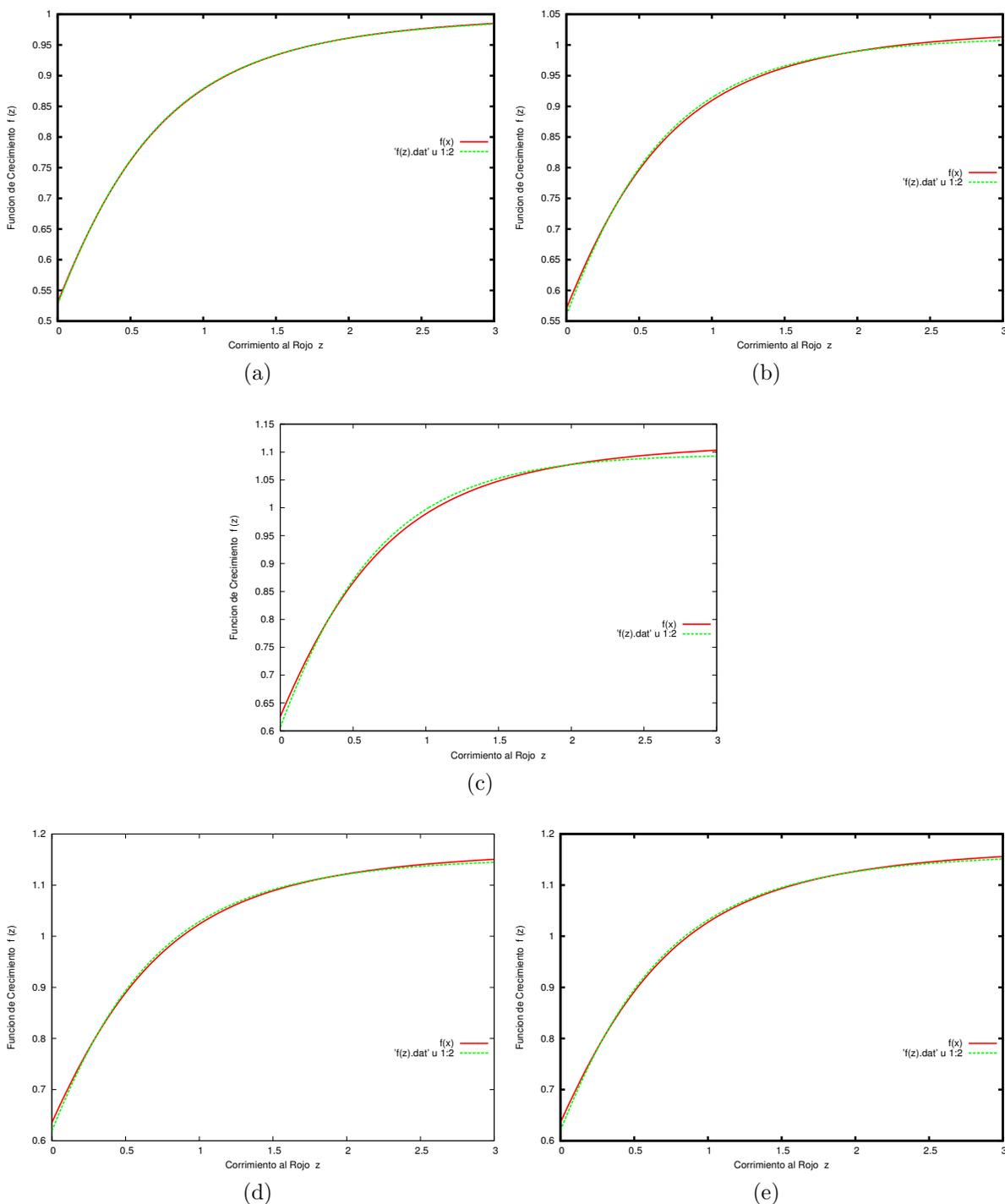


Figura A.1: Datos obtenidos por CosmoSIS para las funciones de crecimiento (líneas verdes) y el mejor ajuste a la curva (líneas rojas). Las primeras tres gráficas muestran el ajuste para  $f(0.01, z) \rightarrow$  (a),  $f(0.034, z) \rightarrow$  (b),  $f(0.106, z) \rightarrow$  (c) y en la parte de abajo para  $f(0.25, z) \rightarrow$  (d) y  $f(0.310817, z) \rightarrow$  (e).

## Modelo 2

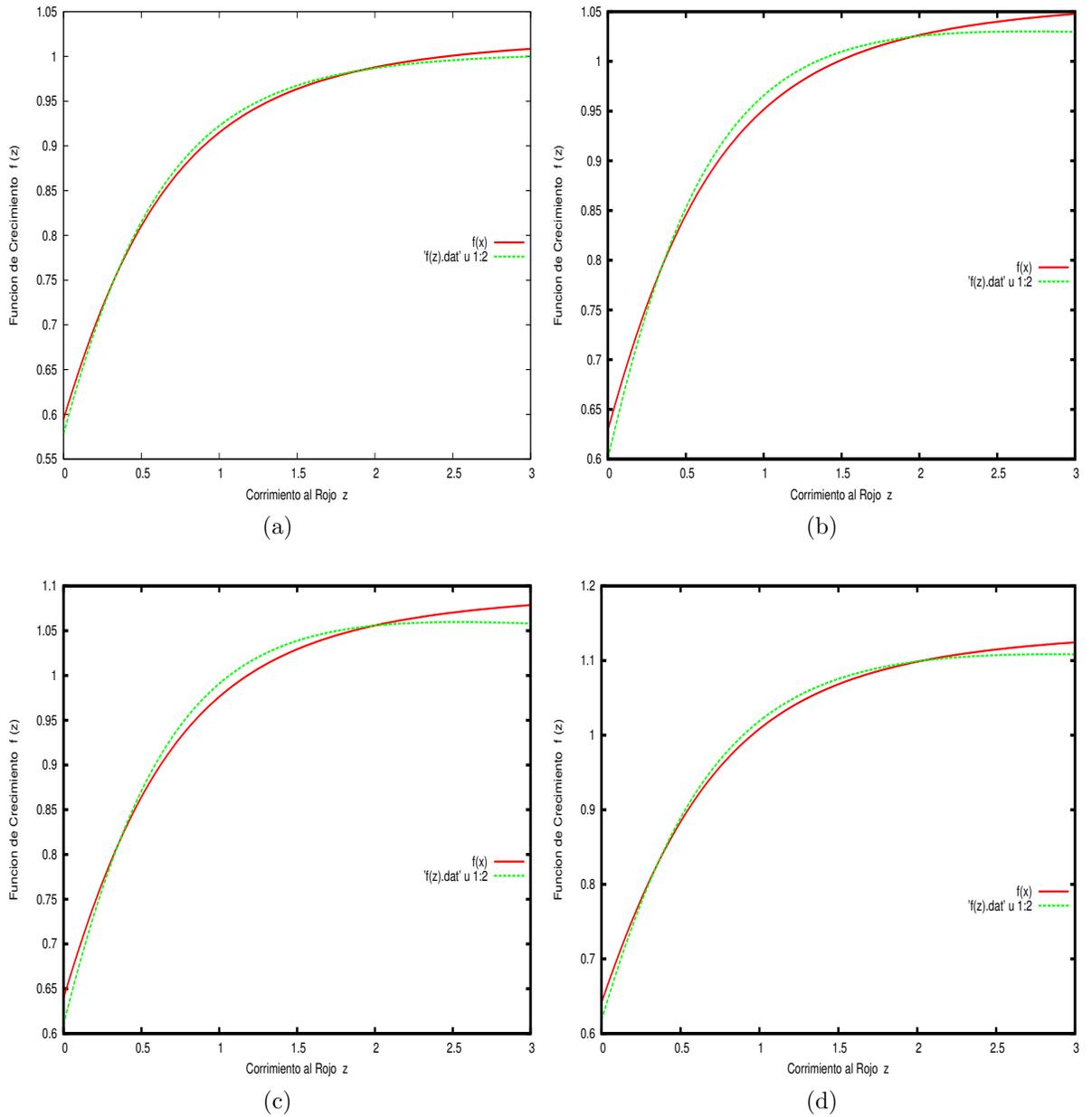


Figura A.2: Datos obtenidos por CosmoSIS para las funciones de crecimiento (líneas verdes) y el mejor ajuste a la curva (líneas rojas). Las primeras tres gráficas muestran el ajuste para  $f(0.064025, z) \rightarrow$  (a),  $f(0.116501, z) \rightarrow$  (b),  $f(0.168977, z) \rightarrow$  (c) y en la parte de abajo para  $f(0.315185, z) \rightarrow$  (d).

## Modelo 3

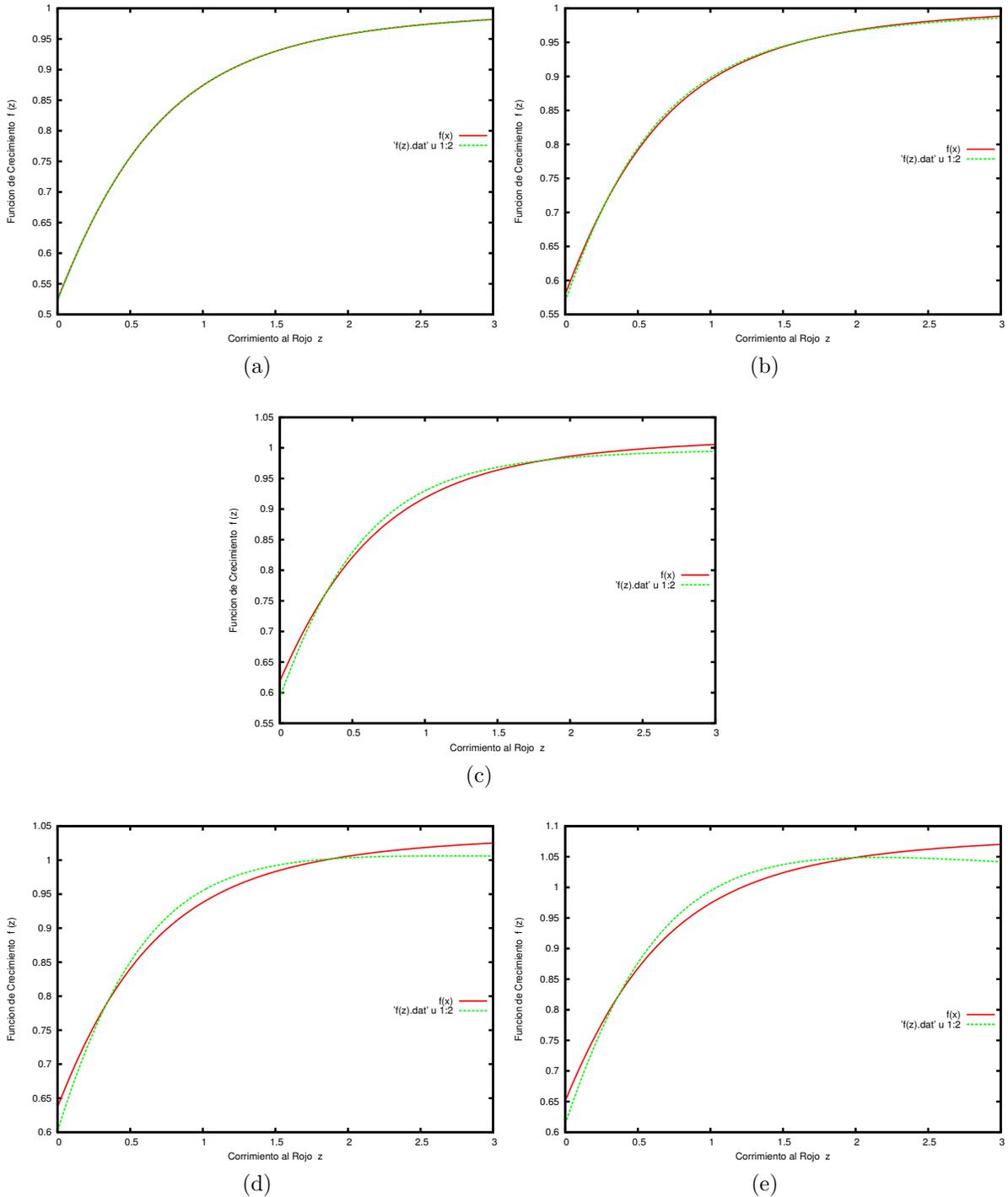


Figura A.3: Datos obtenidos por CosmoSIS para las funciones de crecimiento (líneas verdes) y el mejor ajuste a la curva (líneas rojas). Las primeras tres gráficas muestran el ajuste para  $f(0.001, z) \rightarrow$  (a),  $f(0.064025, z) \rightarrow$  (b),  $f(0.116501, z) \rightarrow$  (c) y en la parte de abajo para  $f(0.168977, z) \rightarrow$  (d) y  $f(0.315185, z) \rightarrow$  (e).

## Modelo 4

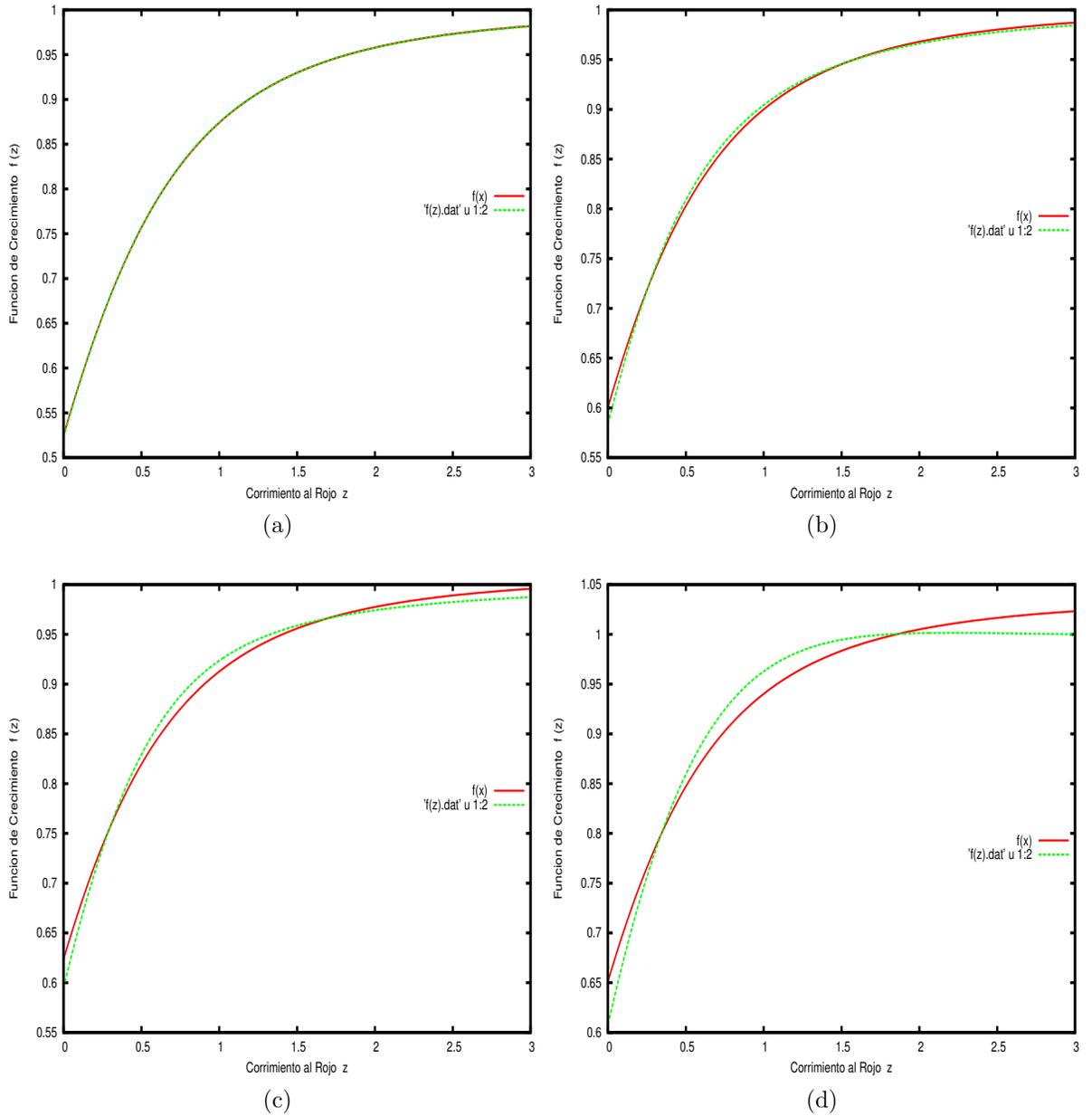


Figura A.4: Datos obtenidos por CosmoSIS para las funciones de crecimiento (líneas verdes) y el mejor ajuste a la curva (líneas rojas). Las primeras tres gráficas muestran el ajuste para  $f(0.001, z) \rightarrow$  (a),  $f(0.116501, z) \rightarrow$  (b),  $f(0.168977, z) \rightarrow$  (c) y en la parte de abajo para  $f(0.315185, z) \rightarrow$  (d).

# Bibliografía

- [1] [astronomia.net/cosmologia/expansin.htm](http://astronomia.net/cosmologia/expansin.htm).
- [2] <http://olympusrojo.blogspot.mx/2011/12/28-el-cmb-y-el-efecto-sunyaev-zeldovich.html>.
- [3] <http://planck.cf.ac.uk/results/cosmic-microwave-background>.
- [4] <http://planck.ipac.caltech.edu/image/planck13-001a>.
- [5] <https://bitbucket.org/joezuntz/cosmosis/wiki/home>.
- [6] <http://scienceblogs.com/startswithabang/2013/05/17/einsteins-greatest-blunder-was-really-a-blunder/>.
- [7] <https://yaredpinzon.wordpress.com/>.
- [8] <http://www.sdss.org/science/orangepie/>.
- [9] [invdes.com.mx/mas/infografias/item/1781-historia-del-universo.html](http://invdes.com.mx/mas/infografias/item/1781-historia-del-universo.html).
- [10] Wmap.website <http://map.gsfc.nasa.gov/index.html>.
- [11] [www.ugr.es/~jillana/sr/sr12.pdf](http://www.ugr.es/~jillana/sr/sr12.pdf).
- [12] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [13] P. A. R. Ade et al. Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood. *Astron. Astrophys.*, 571:A15, 2014.
- [14] P. A. R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 571:A16, 2014.
- [15] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016.

- [16] Shadab Alam et al. The Eleventh and Twelfth Data Releases of the Sloan Digital Sky Survey: Final Data from SDSS-III. *Astrophys. J. Suppl.*, 219(1):12, 2015.
- [17] Eduardo García Amador. Ajustes a curvas de rotación galácticas en gravedad  $f(r)$ , 2010.
- [18] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376, 2003.
- [19] Edmund Bertschinger and Phillip Zukin. Distinguishing Modified Gravity from Dark Energy. *Phys. Rev.*, D78:024015, 2008.
- [20] James Binney and Scott Tremaine. *Galactic Dynamics, 2nd Edition*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, 2nd edition, 2008.
- [21] Sownak Bose, Wojciech A. Hellwing, and Baojiu Li. Testing the quasi-static approximation in  $f(R)$  gravity simulations. *JCAP*, 1502(02):034, 2015.
- [22] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961.
- [23] Carl H. Brans. The Roots of scalar-tensor theory: An Approximate history. In *Santa Clara 2004: 1st International Workshop on Gravitation and Cosmology Santa Clara, Cuba, May 31-June 4, 2004*, 2005.
- [24] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [25] Alejandro Aviles Cervantes. Tesis de licenciatura: Modificaciones al infrarrojo en relatividad general, PCF 2007.
- [26] Jorge L. Cervantes-Cota and George Smoot. Cosmology today-A brief review. *AIP Conf. Proc.*, 1396:28–52, 2011.
- [27] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, 513:1–189, 2012.

- [28] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.
- [29] Andrew R. Liddle David H. Lyth. *The primordial density perturbation: cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge University Press, revised edition, 2009.
- [30] Kyle S. Dawson et al. The Baryon Oscillation Spectroscopic Survey of SDSS-III. *Astron. J.*, 145:10, 2013.
- [31] P.G Roll; R Krotkov; R.H Dicke. The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics*, 26, 1964.
- [32] Sir Eddington, Arthur Stanley. *Report on the relativity theory of gravitation*. London : Fleetway press, ltd, [2d ed.] edition.
- [33] A. Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 844-847., 1915.
- [34] Albert Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen Phys.*, 17:891–921, 1905. [Annalen Phys.14,194(2005)].
- [35] Daniel J. Eisenstein et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *Astrophys. J.*, 633:560–574, 2005.
- [36] Daniel J. Eisenstein et al. SDSS-III: Massive Spectroscopic Surveys of the Distant Universe, the Milky Way Galaxy, and Extra-Solar Planetary Systems. *Astron. J.*, 142:72, 2011.
- [37] Daniel J. Eisenstein, Hee-jong Seo, and Martin J. White. On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter. *Astrophys. J.*, 664:660–674, 2007.
- [38] Stephen G. Brush Gerald Holton. *Physics, the Human Adventure: From Copernicus to Einstein and Beyond*. Rutgers University Press, 3 edition, 2001.

- [39] Tommaso Giannantonio, Matteo Martinelli, Alessandra Silvestri, and Alessandro Melchiorri. New constraints on parametrised modified gravity from correlations of the cmb with large scale structure. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(04):030, 2010.
- [40] Héctor Gil-Marín et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: BAO measurement from the LOS-dependent power spectrum of DR12 BOSS galaxies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 460(4):4210–4219, 2016.
- [41] Héctor Gil-Marín et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: RSD measurement from the LOS-dependent power spectrum of DR12 BOSS galaxies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 460(4):4188–4209, 2016.
- [42] Héctor Gil-Marín, Will J. Percival, Licia Verde, Joel R. Brownstein, Chia-Hsun Chuang, Francisco-Shu Kitaura, Sergio A. Rodríguez-Torres, and Matthew D. Olmstead. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: RSD measurement from the power spectrum and bispectrum of the DR12 BOSS galaxies. 2016.
- [43] M. A. Gomez and J. L. Cervantes-Cota. Spherical Collapse in Modified Gravity Theories. *ArXiv:1506.07934*, June 2015.
- [44] Alan H. Guth and S. Y. Pi. Fluctuations in the New Inflationary Universe. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1110–1113, 1982.
- [45] A. J. S. Hamilton. Linear redshift distortions: A Review. In *Ringberg Workshop on Large Scale Structure Ringberg, Germany, September 23-28, 1996*, 1997.
- [46] S. W. Hawking. The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe. *Phys. Lett.*, B115:295, 1982.
- [47] Alireza Hojjati, Levon Pogosian, Alessandra Silvestri, and Starla Talbot. Practical solutions for perturbed  $f(R)$  gravity. *Phys. Rev.*, D86:123503, 2012.

- [48] Alireza Hojjati, Levon Pogossian, and Gong-Bo Zhao. Testing gravity with CAMB and CosmoMC. *JCAP*, 1108:005, 2011.
- [49] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. A Parameterized Post-Friedmann Framework for Modified Gravity. *Phys. Rev.*, D76:104043, 2007.
- [50] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of  $f(R)$  Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests. *Phys. Rev.*, D76:064004, 2007.
- [51] J. C. Jackson. Fingers of God: A critique of Rees' theory of primordial gravitational radiation. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 156:1P–5P, 1972.
- [52] N. Kaiser. Clustering in real space and in redshift space. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 227:1–27, 1987.
- [53] E. Komatsu et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys. J. Suppl.*, 192:18, 2011.
- [54] Kazuya Koyama. Cosmological Tests of Modified Gravity. *Rept. Prog. Phys.*, 79(4):046902, 2016.
- [55] Lifshitz E.M. Landau L.D. *Course of theoretical physics Vol. 2. The classical theory of fields*. Butterworth-Heinemann, 4ed. edition, 1994.
- [56] E. Lifshitz. On the Gravitational stability of the expanding universe. *J. Phys.(USSR)*, 10:116, 1946.
- [57] Paul L. Lightman, Alan P.; Schechter. The Omega dependence of peculiar velocities induced by spherical density perturbations. *Astrophysical Journal Supplement Series (ISSN 0067-0049)*, vol. 74, Dec. 1990, p. 831, 832., pages 1–2, 1990.
- [58] Eric V. Linder and Adrian Jenkins. Cosmic structure and dark energy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 346:573, 2003.
- [59] Jesús Alberto Gómez López. Ajustes a curvas de rotación galácticas con perfiles de materia oscura y en la teoría de grumiller, Septiembre de 2013.

- [60] Minkowski H. Weyl H. Lorentz H.A., Einstein A. *The principle of relativity. Memoirs on the special and general theory of relativity.* Dover, 1923.
- [61] D. Lovelock. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, 12:498–501, 1971.
- [62] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges. *Astrophys. J.*, 455:7–25, 1995.
- [63] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [64] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology.* Cambridge University Press, Oxford, 2005.
- [65] J. V. Narlikar. *Introduction to Cosmology (3rd ed.).* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [66] Hiroaki Oyaizu, Marcos Lima, and Wayne Hu. Nonlinear evolution of  $f(R)$  cosmologies. 2. Power spectrum. *Phys. Rev.*, D78:123524, 2008.
- [67] T. Padmanabhan. Advanced topics in cosmology: a pedagogical introduction. *AIP Conf. Proc.*, 843:111–166, 2006.
- [68] P. J. E. Peebles. *Principles of physical cosmology.* Princeton series in physics. Princeton University Press, 1993.
- [69] S. Perlmutter et al. Cosmology from Type Ia supernovae. *Bull. Am. Astron. Soc.*, 29:1351, 1997.
- [70] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586, 1999.
- [71] Levon Pogosian and Alessandra Silvestri. The pattern of growth in viable  $f(R)$  cosmologies. *Phys. Rev.*, D77:023503, 2008. [Erratum: *Phys. Rev.*D81,049901(2010)].
- [72] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.

- [73] Aurelio Carnero Rosell. *Determinación de parámetros cosmológicos usando oscilaciones acústicas de bariones en cartografiados fotométricos de galaxias*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Físicas, Departamento de Física Teórica I, 2011.
- [74] Leopoldo García Colín Scherer. *La Estructura del Universo*. El Colegio Nacional, 2005.
- [75] Edmund schinger. Cosmological dynamics: Course 1. In *Summer School on Cosmology and Large Scale Structure (Session 60) Les Houches, France, August 1-28, 1993*, 1993.
- [76] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.
- [77] S. S. Shapiro, J. L. Davis, D. E. Lebach, and J. S. Gregory. Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979-1999. *Phys. Rev. Lett.*, 92:121101, 2004.
- [78] Alessandra Silvestri, Levon Pogosian, and Roman V. Buniy. Practical approach to cosmological perturbations in modified gravity. *Phys. Rev.*, D87(10):104015, 2013.
- [79] Alexei A. Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett.*, B91:99–102, 1980.
- [80] K. S. Stelle. Classical Gravity with Higher Derivatives. *Gen. Rel. Grav.*, 9:353–371, 1978.
- [81] N. Suzuki et al. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above  $z \lesssim 1$  and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample. *Astrophys. J.*, 746:85, 2012.
- [82] R. B. Tully and J. R. Fisher. A Tour of the Local Supercluster. in *IAU Symposium, The Large Scale Structure of the Universe*, ed. M. S. Longair and J. Einasto, vol.79:1–3, 1978.

- [83] R. Utiyama and Bryce S. DeWitt. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *J. Math. Phys.*, 3:608–618, 1962.
- [84] L. Verde. Statistical Methods in Cosmology. In G. Wolschin, editor, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 800 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, pages 147–177, March 2010.
- [85] Clifford M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, rev sub edition, 1993.
- [86] Clifford M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.
- [87] Gong-Bo Zhao. Modeling the Nonlinear Clustering in Modified Gravity Models. I. A Fitting Formula for the Matter Power Spectrum of  $f(R)$  Gravity. *Astrophys. J. Suppl.*, 211:23, 2014.
- [88] Gong-Bo Zhao, Levon Pogosian, Alessandra Silvestri, and Joel Zylberberg. Searching for modified growth patterns with tomographic surveys. *Phys. Rev.*, D79:083513, 2009.
- [89] Joe Zuntz, Marc Paterno, Elise Jennings, Douglas Rudd, Alessandro Manzotti, Scott Dodelson, Sarah Bridle, Saba Sehrish, and James Kowalkowski. CosmoSIS: Modular Cosmological Parameter Estimation. *Astron. Comput.*, 12:45–59, 2015.